

不安定化制御によるカオスの一生成法

高坂 拓司<sup>†</sup>      上田 哲史<sup>†</sup>      川上 博<sup>††</sup>

A Method to Generate a Chaotic Attractor by Destabilization

Takuji KOUSASKA<sup>†</sup>, Tetsushi UETA<sup>†</sup>, and Hiroshi KAWAKAMI<sup>††</sup>

あらまし 本論文では、自律系に見られる安定平衡点やリミットサイクルに対して、線形制御理論の極配置法を応用し、軌道の性質を不安定にするフィードバックを施して、カオスアトラクタを発生させる手法について述べる。安定平衡点の場合は、その点周りの特性方程式の極を不安定に指定した制御器を取り付け、制御を印加する時間を適当に与える。また、リミットサイクルに対しては、Poincaré写像を定義し、それによって得られる差分方程式系の固定点を不安定化させる制御系を構成し、カオスを発生させる。これらの手法の適用例として、こう配系回路、van der Pol 発振器、拡張 BVP 発振器のモデルにそれぞれ不安定化制御を施し、得られたカオスについて検討した。

キーワード カオス制御, 自律系, カオス, リミットサイクル, 不安定化

1. まえがき

近年、カオスの工学的応用としてカオス制御が注目されている [1]。これは、カオスアトラクタ中に無数に埋め込まれている不安定周期軌道のうちの一つを安定化する問題で、OGY 法 [2] をはじめとする離散時間制御と [3], [4], Pyragas [5] らの連続時間制御とに大別される。どちらの方法も、目標となる不安定軌道の効率的な安定化が目的であった。

本論文では、従来のカオス制御とは逆の視点に立ち、安定平衡点やリミットサイクルを不安定化し、カオス化させることを考える。すなわち、自律系に見られる安定平衡点やリミットサイクルに対し、線形制御理論の極配置法を応用し、安定な軌道の極を不安定な極へと指定することによりカオスアトラクタを得る手法について検討した。安定平衡点の場合は、安定平衡点周りの特性方程式の極を不安定に指定した制御器を取り付け、制御を印加する時間を適当に与える。また、リミットサイクルに対しては、Poincaré 写像を定義し、それによって得られる差分方程式系の固定点を不安定化した。これらの制御により安定平衡点、安定リミット

サイクルの近傍をはじかれた軌道は、もとの系の散逸の性質（大域的に安定な性質）とあいまってカオスアトラクタとして振舞うことを確認した。適用例として、こう配系回路、van der Pol 方程式、拡張 BVP 発振器のモデルにそれぞれ不安定化制御を施し、得られたカオスについて検討した。

2. 問題の記述

本論文では、次の  $n$  次元自律系を取り扱う：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \tag{1}$$

ここで  $x \in R^n$  は状態、 $\lambda \in R^r$  は式 (1) のパラメータのうち、摂動可能なパラメータ、関数  $f: R^n \times R^r \rightarrow R^n$  は各変数、パラメータについて必要なだけ微分可能とする。この系が今、ある固定したパラメータ  $\lambda^* \in R^r$  において、平衡点以外の任意の初期値から出発する解軌道の  $t \rightarrow \infty$  における極限は、安定平衡点若しくは安定なリミットサイクルのみであり、カオスアトラクタは存在しないと仮定する。これらアトラクタに対して不安定化制御を施し、安定な軌道を不安定化させる方法について、安定平衡点の場合と安定なリミットサイクルの場合に分けて検討する。

3. 安定平衡点に対する不安定化

3.1 制御器の構成

$x^*$  を式 (1) の平衡点とし、パラメータ  $\lambda^*$  に状態

<sup>†</sup> 徳島大学工学部知能情報工学科, 徳島市  
Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima-shi, 770 Japan

<sup>††</sup> 徳島大学工学部電気電子工学科, 徳島市  
Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima-shi, 770 Japan

フィードバックする不安定制御器を構成する。平衡点周りの変分：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{u} \quad (2)$$

に関する線形化方程式は次式となる。

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3)$$

ここで、

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} \quad (n \times n) \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} \quad (n \times r) \quad (5)$$

式(3)に対して次の状態フィードバックを構成する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\xi} = \mathbf{C}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (6)$$

ここで  $T$  は転置を表し、 $\mathbf{C}$  は  $(r \times n)$  の定行列である。制御を加えたときの系の方程式は次式となる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\xi}) \quad (7)$$

このとき、制御系の特性方程式は次式で表される。

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^T - \mu \mathbf{I}_n| = 0 \quad (8)$$

ここで  $\mathbf{I}_n$  は  $(n \times n)$  の単位行列である。式(8)の極を極配置法により任意に指定することにより、式(1)の平衡点周りの局所的な安定性を操作することができる。ここで、制御対象が可制御条件を満たす場合には、任意の極配置が可能である[6]。可制御条件は、

$$\text{rank} [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (9)$$

で示される。つまり、式(9)を満たすとき、式(3)に対し極を不安定に指定すれば、平衡点を不安定化する制御系を構成できる。ここで制御をはじめめる条件は、

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad (10)$$

である。制御対象が安定結節点である場合、制御によってはじかれた軌道が再び安定多様体上に乗るので、周期解が発生する可能性がある。そのため、 $\delta$  は、線形近似が意味を失わない程度の大きい値をとる必要がある。

次に、制御時間を示すパラメータ  $\tau$  を導入する。式

(1)の解軌道が平衡点近傍にくる、すなわち式(10)を満たすならば、次の手順で制御を行う：

(1) 式(6)を用い、制御入力  $\mathbf{u}$  を計算する。

(2)  $\tau$  時間だけ  $\mathbf{u}$  を制御パラメータに印加する。 $\delta$  内に式(1)の軌道が入るたびに上記の制御を繰り返す。その結果、解軌道は安定平衡点近傍で不安定となり、安定平衡点に落ち着くことはなくなる。

### 3.2 例題1：こう配系 (Gradient System)

図1で示される非線形抵抗を含むRC回路を考える。非線形抵抗は次式で表される特性をもつと仮定する。

$$g(v_2) = -\alpha v_2 + \beta v_2^3 \quad (11)$$

$C_1 = C_2 = 1.0, R_1 = R_2 = 1.0, E = 0.5, \alpha = 2.0, \beta = 1.0$  とすると回路方程式は次式となる。

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = E - 2v_1 + v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = v_1 - [-v_2 + v_2^3] \end{cases} \quad (12)$$

この回路の位相平面図を図2に示す。ここでは電源電圧を制御して、安定結節点  $N_1$  を不安定化し、カオスアトラクタを得たいとしよう。

変分を  $v_1 = \hat{v}_1 + \xi, v_2 = \hat{v}_2 + \eta, E = \hat{E} + u$  とし、式(3)に対応するヤコビ行列  $\mathbf{A}$  および制御パラメータ  $E$  の変分  $\mathbf{B}_E$  を求めると  $\text{rank} [\mathbf{B}_E | \mathbf{A}\mathbf{B}_E] = 2$  となり、可制御である。従って、制御を加えた系全体の特性方程式は次式となる。

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}_E \mathbf{C}^T - \mu \mathbf{I}_2| = \mu^2 - p\mu + q = 0 \quad (13)$$

$p, q$  を適当な不安定領域上においたとき、制御器  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  は次式で示される。

$$\begin{aligned} C_1 &= p + (1 - \alpha + 3\beta v_2^2) + 2 \\ C_2 &= -(1 - \alpha + 3\beta v_2^2) \\ &\quad (p + (1 - \alpha + 3\beta v_2^2)) - q - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

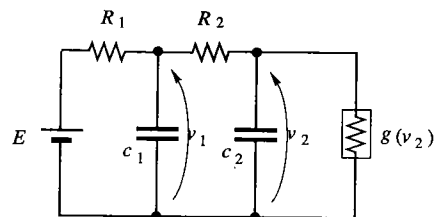


図1 RC回路  
Fig.1 RC circuit.

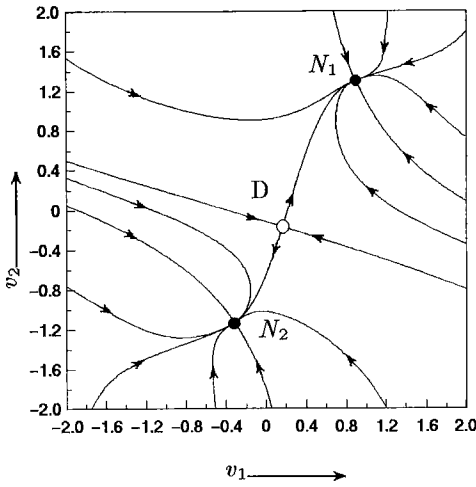


図2 RC回路の位相平面図  
Fig.2 Phase potrait of RC circuit.

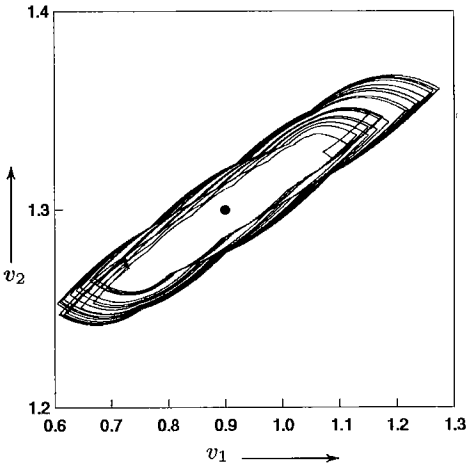


図3 RC回路に制御を加えたカオス状態の位相平面図。●は安定平衡点  $N_1$  を示す

Fig.3 Phase portrait of chaotic state as a result with control in RC circuit. ● shows a stable equilibrium point  $N_1$ .

$\tau$  = Runge-Kutta の繰返し回数  $\times$  刻み幅 =  $700 \times 0.0005$ ,  $p = 3.0$ ,  $q = 3.0$ ,  $\delta = 0.2$  と選び, 制御を加えたときの位相平面図を図3に示す。振動的な素子の構成の存在しない系から, カオス的な解軌道を生じることができたことがわかる。

#### 4. 安定なリミットサイクルに対する不安定化

式(1)が安定な周期軌道をもつ場合, この軌道をもつ不安定化する問題を考える。Poincaré写像によって離散化された空間で制御器を設計する。

##### 4.1 Poincaré写像と差分方程式系

初期値  $x_0$  を出発する解を次式で表す:

$$x(t) = \varphi(t, x_0, \lambda) \tag{15}$$

次に, 式(1)が周期解をもつと仮定する。この周期解に対して, Poincaré切断面を構成し, Poincaré写像を,

$$T: \Pi \rightarrow \Pi$$

$$x \mapsto \varphi(L(x_0), x, \lambda) \tag{16}$$

と定義する。ここで,  $L(x_0)$  は  $x_0 \in \Pi$  を初期値とする解軌道が, 再び  $\Pi$  に交わるまでに要する時間である。そのとき, 解は次の初期条件を満たす。

$$x(t) = \varphi(t, x_0, \lambda) \tag{17}$$

$$x(0) = \varphi(0, x_0, \lambda) = x_0 \tag{18}$$

$x^*$  を式(1)のリミットサイクルの固定点とする。そのとき,

$$x^* = T(x^*, \lambda^*) = \varphi(L(x^*), x^*, \lambda^*) \tag{19}$$

であり,  $L(x^*)$  はそのリミットサイクルの周期となる。  $\lambda$  が振動可能なパラメータであるとき,  $\lambda$  を制御入力に選ぶと, 固定点周りの変分方程式は,

$$x(k) = x^* + \xi(k),$$

$$\lambda(k) = \lambda^* + u(k) \tag{20}$$

となる。ここで  $x(k)$  は

$$x(k) = \varphi(L(x(k-1)), x(k-1), \lambda(k-1))$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \tag{21}$$

を意味する。式(20)を式(19)に代入し,

$$x(k+1)$$

$$= x^* + \xi(k+1)$$

$$= T(x^* + \xi(k), \lambda^* + u(k))$$

$$= T(x^*, \lambda^*) + DT(x^*)\xi(k)$$

$$+ DT(\lambda^*)u(k) + \dots \tag{22}$$

を得る。よって、Poincaré 写像  $T$  による差分方程式系は次式となる：

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + B\mathbf{u}(k) \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= DT(\mathbf{x}^*) \quad (n \times n) \\ B &= DT(\lambda^*) \quad (n \times r) \end{aligned} \quad (24)$$

差分方程式系 (23) において、原点が不安定になるように、入力  $\mathbf{u}(k)$  を決めてやればよいが、 $n$  次元空間  $\Pi$  においては、固有値の一つは 1 になっており (周期解条件)、この固有空間方向は制御は必要がない。従って、次に述べる局所座標空間を考え、その上で制御器の設計を行えばよい。

#### 4.2 局所座標系での制御器設計

今、Poincaré 切断面はスカラー関数  $q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  によって

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid q(\mathbf{x}) = 0\} \quad (25)$$

と選んでおく。今、点  $\mathbf{x}_0 \in \Pi$  を初期値とする解が、 $t = L(\mathbf{x}_0)$  に再び  $\Pi$  と交わる点を  $\mathbf{x}_1$  とする：

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(L(\mathbf{x}_0)) = \varphi(L(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \quad (26)$$

Poincaré 写像の初期値に関する微分は次式となる [7]。

$$\begin{aligned} DT(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \\ &= \left[ I_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \end{aligned} \quad (27)$$

また、パラメータによる微分  $DT(\lambda)$  は、式 (27) の  $\partial \varphi / \partial \mathbf{x}_0$  を、 $\partial \varphi / \partial \lambda$  に置き換えることによって求められる。

さて、 $\Pi$  の局所座標として  $\mathbf{w} \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$  を、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= w_1, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}, \\ \mathbf{x}_n &= s(w_1, \dots, w_{n-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

によって埋め込んだとし、この埋込み写像を  $h^{-1}$  とする：

$$\begin{aligned} h^{-1}: \Sigma &\rightarrow \Pi \\ \mathbf{w} &\mapsto h^{-1}(\mathbf{w}) = (w_1, \dots, w_{n-1}, \\ &\quad s(w_1, \dots, w_{n-1})) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで  $s$  とは、陰関数の定理により、式 (25) から導出される関数である。また、射影  $h$  を、

$$\begin{aligned} h: \Pi &\rightarrow \Sigma \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (30)$$

と定義する。従って、局所座標上での Poincaré 写像  $T_\ell$  は

$$\begin{aligned} T_\ell: \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ \mathbf{w} &\mapsto h \circ T \circ h^{-1}(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (31)$$

で表される。 $\Sigma$  上での  $T_\ell$  の微分は次式となる：

$$\begin{aligned} DT_\ell(\mathbf{w}_0) &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \left[ I_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ &\quad \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial h^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \end{aligned} \quad (32)$$

$$DT_\ell(\lambda) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \left[ I_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (33)$$

なお、詳しい式の導出は、文献 [7] を参照。

次に、制御器の設計をこの局所座標空間  $\Sigma$  上で行う。式 (19) と同様に、 $\Sigma$  上の固定点は、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= T_\ell(\mathbf{w}^*, \lambda^*) \\ &= h(\varphi(L(h^{-1}(\mathbf{w}^*)), h^{-1}(\mathbf{w}^*), \lambda^*)) \end{aligned} \quad (34)$$

と表される。変分方程式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{w}^* + \xi'(k+1) \\ &= T_\ell(\mathbf{w}^* + \xi'(k), \lambda^* + \mathbf{u}(k)) \\ &= T_\ell(\mathbf{w}^*, \lambda^*) + DT_\ell(\mathbf{w}^*)\xi'(k) \\ &\quad + DT_\ell(\lambda^*)\mathbf{u}(k) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

となる。よって差分方程式系は、

$$\xi'(k+1) = A'\xi'(k) + B'\mathbf{u}(k) \quad (36)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A' &= DT_\ell(\mathbf{w}^*) \quad ((n-1) \times (n-1)) \\ B' &= DT_\ell(\lambda^*) \quad ((n-1) \times r) \end{aligned} \quad (37)$$

である。この差分方程式の解  $\xi'(k)$  が原点に不安定になるように、状態フィードバック：

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{C}'^T \boldsymbol{\xi}'(k) = \mathbf{C}'^T (\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^*) \quad (38)$$

を施せばよい。ここで  $\mathbf{C}'$  は  $(r \times (n-1))$  の制御行列である。つまり、局所座標系で制御器を設計する限り、 $n-1$  個の状態のみで制御量を決定することができる。ここで可制御条件は次式となる。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{A}'\mathbf{B}' & \mathbf{A}'^2\mathbf{B}' & \dots & \mathbf{A}'^{n-1}\mathbf{B}' \end{bmatrix} \\ = n-1 \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)を制御対象が満たすなら、任意の極配置が可能である。制御入力を印加した系の方程式は次式となる。

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x, \lambda^* + \mathbf{C}'^T \boldsymbol{\xi}') \quad (40)$$

制御開始条件は、

$$\|\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^*\| < \delta \quad (41)$$

である。式(1)の軌道が式(41)を満たすとき、上記の不安定化制御を行い、 $L(\mathbf{w}(k))$  時間  $\mathbf{u}(k)$  を制御パラメータに加え続ける。その結果、安定固定点を不安定にすることができる。

大きなパラメータ摂動が制御パラメータに加わった場合、分岐現象が生じ、新たに平衡点が発生して、解軌道が安定平衡点に落ち着くため、Poincaré切断面  $\Pi$  に再び交わらない可能性はある。この場合、 $\mathbf{C}'$  は選び方に自由度があるため、系によって試行錯誤的に適切な極を選べばよい。この制御系の安定性、可制御条件、具体的な制御器の算出は、文献[4]、[8]を参照。

### 4.3 適用例

上田、川上は2次元非自律系である Duffing 方程式に対し、不安定化制御を行っている[4]。本論文では、2次元および3次元自律系に対し、不安定化制御を施す。

#### 4.3.1 van der Pol 発振器

van der Pol 発振器は次式で記述される。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & = f_1 \\ \frac{dy}{dt} = \epsilon(1-x^2)y - \omega_0^2 x & = f_2 \end{cases} \quad (42)$$

$\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$  の場合の位相平面図を図4に示す。 $\epsilon > 0$  において、原点以外の任意の初期値から出発する解は、時間が十分経つと、図4で示すリミットサイクルに落ち着く。

ここで Poincaré 断面を  $x = 0, y > 0$  と選ぶ。今、制御パラメータとして  $\epsilon$  のみを考える。可制御条件で

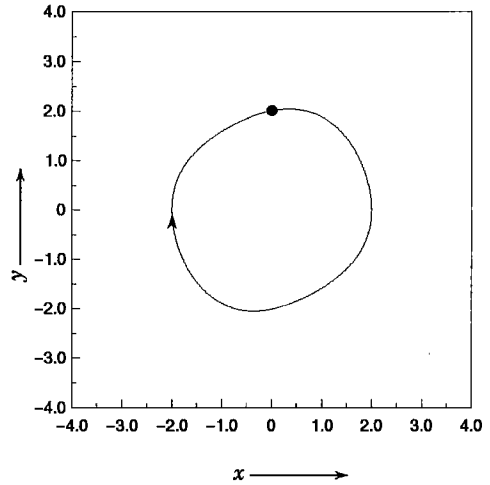


図4  $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$  の位相平面図  
Fig. 4 Phase portrait.  $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$ .

ある式(39)は満たされているので  $\epsilon$  を制御パラメータと決定する。ここで式(37)の係数行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{f_2}{f_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \mathbf{B}' &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \epsilon} - \frac{f_2}{f_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (43)$$

で示されるスカラー値となる。これら行列の各要素は、次の線形微分方程式の基本行列解を数値積分によって  $t = 0$  から  $t = L(\mathbf{x}_0)$  まで求めるとよい：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}_0} (t, \varphi(t, \mathbf{x}_0)) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \quad (44)$$

複素平面上の不安定領域に固有値をおくことで制御ベクトル  $\mathbf{C}'$  を求める。この例では、 $\mathbf{C}'$  はスカラー値となる。図4のリミットサイクルに対し、不安定化制御を行った場合の位相平面図を図5に示す。

$\epsilon$  に最大摂動量  $\max(u) = 1.78$  を加えた位相平面図は図6となる。

ここで制御時間は、軌道が Poincaré 断面に再び至るまでであり、制御開始条件は  $\delta = 0.1$  とする。 $u < -0.2$  ならば制御を加える間、安定平衡点に向かい、 $u > -0.2$  なら、安定平衡点は不安定となり、 $\epsilon = \epsilon^* + u$  となるリミットサイクルを発生させる。そして制御が終了した時点から、本来の  $\epsilon = 0.18$  の場合の軌道となるため、結果的に図6のリミットサイクルよりも内側の領域内で複雑な位相平面図を生み出す。その他、制御ベクトルが正の場合、初期値の位置を図

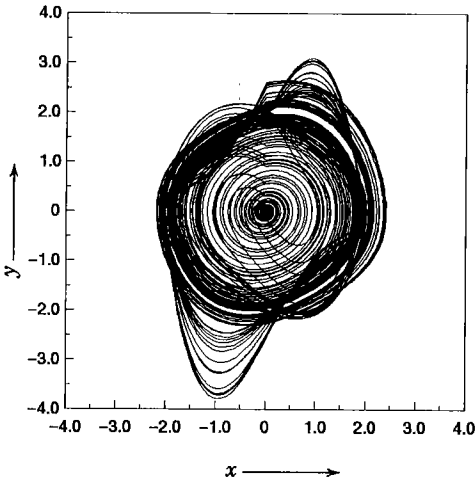


図5  $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$  で  $\epsilon$  に制御を加えた位相平面図 1  
Fig.5 Phase portrait 1 as a result of adding control parameter  $\epsilon$ .

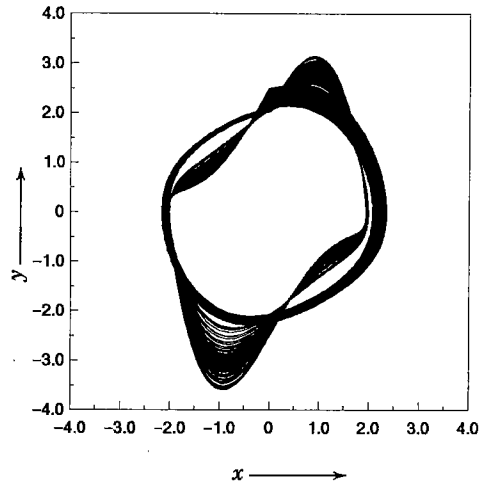


図7  $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$  で  $\epsilon$  に制御を加えた位相平面図 2. 初期値は  $(x, y) = (-0.76, 2.88)$  と選んだ  
Fig.7 Phase portrait 2 as a result of adding control parameter  $\epsilon$ . The initial value is  $(x, y) = (-0.76, 2.88)$ .

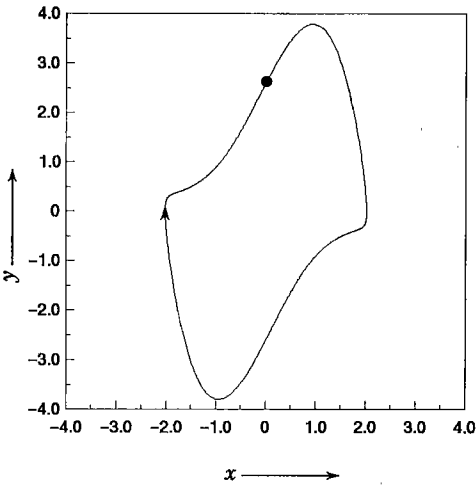


図6  $\epsilon = 0.2 + \max(u), \omega_0 = 1.0$  の位相平面図  
Fig.6 Phase portrait.  $\epsilon = 0.2 + \max(u), \omega_0 = 1.0$ .

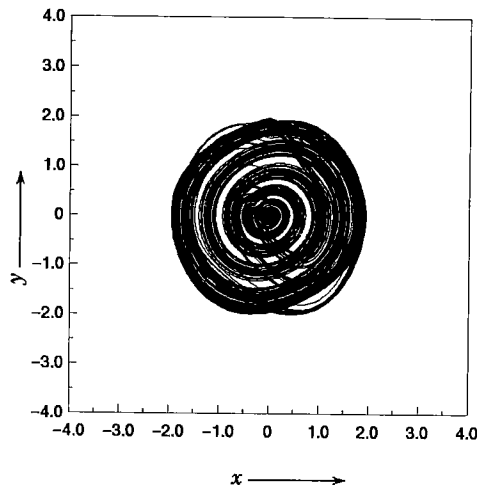


図8  $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$  で  $\epsilon$  に制御を加えた位相平面図 3. 初期値は  $(x, y) = (-1.0, -1.0)$  と選んだ  
Fig.8 Phase portrait 3 as a result of adding control parameter  $\epsilon$ . The initial value is  $(x, y) = (-1.0, -1.0)$ .

4のリミットサイクルよりも内側の領域におくか否かによっても全く異なる位相平面図となる(図7, 図8). 図5の最大リアプノフ指数は0.08であり, カオスとみなすことができる.

#### 4.3.2 拡張 BVP 発振器

吉永, 川上, 吉川らは, 拡張 BVP (Bonhoeffer-van der Pol) 発振器を化学的非線形振動のモデルとして提案した. この回路によって, 油と水の2層界面系の定性的性質, すなわち系の自励振動の波形や分岐現象を

説明している. 図9に回路図を示す. 回路方程式は, 3階の自律系常微分方程式となる:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = L_1^{-1}(E_1 - R_1 i_1 - v) = f_1 \\ \frac{di_2}{dt} = L_2^{-1}(E_2 - R_2 i_2 - v) = f_2 \\ \frac{dv}{dt} = C^{-1}(i_1 + i_2 + J - g(v)) = f_3 \end{cases} \quad (45)$$

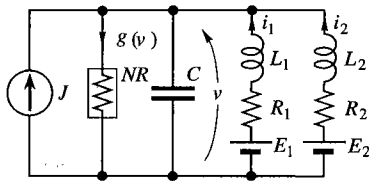


図9 拡張 BVP 発振器  
Fig.9 extended BVP oscillator.

図9中の非線形抵抗 NR は次の電圧電流特性をもつと仮定する。

$$g(v) = -v + v^3/3 \quad (46)$$

この発振器ではさまざまな弛張振動のリミットサイクルが観測される。今、回路定数を、

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = 0.5, \quad L_1^{-1} = 0.4, \\ L_2^{-1} = 0.1, \quad E_1 = 0.2, \quad J = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

および、 $C^{-1} = 3, E_2 = 1.25$  に固定する。以下、この安定周期解を不安定化する制御器の設計手順を示す。

(1) まず、Poincaré 切断面を定める。周期軌道は平衡点を通る任意平面に横断的であるので、切断面として例えば、

$$\begin{aligned} \Pi = \{x_0 = (i_1, i_2, v) \in R^3 \mid \\ v = v_0, i_1 + i_2 > i_{10} + i_{20}\} \end{aligned} \quad (48)$$

をとることができる。切断面の局所座標系は  $\Sigma \in R^2$  となり、式(25)のスカラ関数は、 $q(i_1, i_2, v) = v - v_0 = 0$  が対応する。

(2) 制御条件および制御時間を決定する。今回、制御条件  $\delta = 0.02$ 、制御時間は 4.3.1 と同様とする。

(3) 制御に用いるパラメータを決定し、可制御性が満たされるならば制御器のゲインを決定する。ここでは電源電圧  $E_2 \in R$  を制御パラメータに選ぶ。 $\Sigma$  上の差分方程式系の係数行列 (37) は具体的には、

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_1} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_2} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial i_1} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial i_2} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_2} \end{bmatrix} \\ B' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_2} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial E_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_2} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial E_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

となる。行列の各要素は式(44)を用い決定できる。

(4)  $A' + B'C'$  の特性方程式 (固有方程式) が不

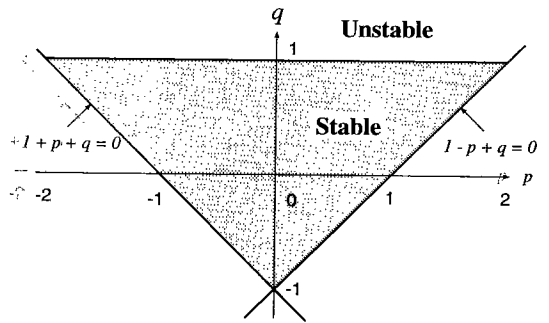


図10 (p, q) 平面上での安定性  
Fig.10 Stability in (p, q) plane.

安定となるように、制御ベクトル  $C' = (C_1, C_2)$  を決定する。具体的には  $C'$  は次式により決定される。

$$\left| A' + B'C'^T - \mu I_2 \right| = \mu^2 - p\mu + q = 0 \quad (50)$$

図10の影以外の領域は不安定領域を示している。この領域上に  $p, q$  をおくことで  $C_1, C_2$  は式(50)より計算される。ここでは、 $(p, q) = (1.3, 1.3)$  とした。

(5) 最後に、式(41)が満たされるとき、式(38)を通じて制御入力  $u(k)$  (スカラ) が求まり、式(45)のパラメータ  $E_2$  の摂動として次のようにフィードバックされる：

$$E_2 \rightarrow E_2 + u(k) \quad (51)$$

図11,12に  $i_1-v$  での位相平面図を示す。

制御前は図11で示す安定なリミットサイクルが存在しており、このパラメータ値では状態空間内に他のアトラクタは存在しない。設計手順に従って求めた制御器を用いて、制御をリミットサイクルに対し印加し始めると、図12で示す軌道を得る。このとき、最大リアプノフ指数は0.03と算出され、カオスアトラクタが生成できていることが示される。制御に要したパラメータ  $E_2$  の摂動量は図13で表されるが、この  $E_2$  の変動は、周期倍分岐集合の存在するパラメータ値まで届くことはなく、分岐とは無関係にカオスアトラクタが得られていることは興味深い。 $(p, q) = (-1.5, -1.5)$  とした場合、 $E_2$  の変動は周期倍分岐のパラメータに届く。そのため当然カオスアトラクタが得られる。上述のように適当に指定した不安定な極を用いることで、カオスを生成できるか否かはあらかじめわからない。本例題で  $(p, q) = (-2.0, -2.0)$  と設定したならば、4.2で述べたような新たな平衡点が発生し、解軌

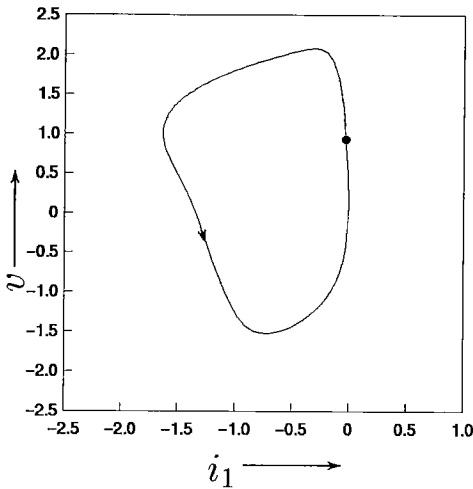


図11 安定なリミットサイクル  
Fig.11 Stable limit cycle.

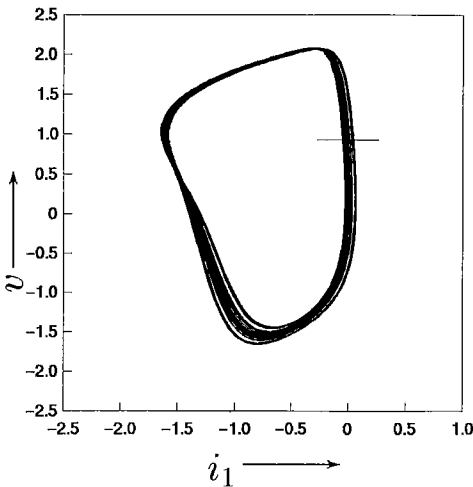


図12 不安定化されたリミットサイクル,  $\delta = 0.02$  と選んだ  
Fig.12 Destabilized limit cycle.  $\delta = 0.02$ .

道がこの点にとらわれ、Poincaré 切断面  $\Pi$  に再び交わらない。このような場合、不安定な極は選び方に自由度があるため、系によって試行錯誤的に適切な極を選ばばよい。

系のパラメータがカオスの窓にある場合、アトラクタに収束するまでの過渡状態は無制御でもカオス的となるため、より少ないパラメータ摂動で安定なカオスアトラクタが得られる。藤井らはこの性質を利用し、差分方程式系の周期点付近の軌道学習に応用してい

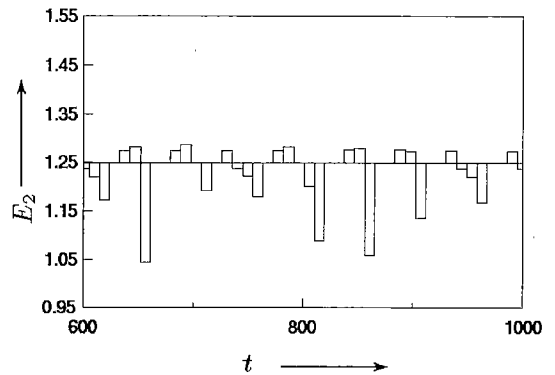


図13 パラメータ  $E_2$  の摂動量  
Fig.13 Perturbation value of parameter  $E_2$ .

る [11].

### 5. むすび

カオス制御を応用した軌道の不安定化法を提案した。例題としてこの配系、van der Pol 発振器、拡張 BVP 発振器をそれぞれ不安定化し、カオスアトラクタの発生を確認した。

今回の手法では、得られたカオスの軌道は連続であるが、比較的振幅が大きいステップ関数の制御入力のため、連続的に微分可能な曲線とはなっていない。従って、軌道の滑らかさまで考慮した制御法を見出すことが今後の課題である。

生命現象であるヒトの心臓の拍動では、カオス的変動が健康で、周期振動を示す状態がむしろ危険であるとの報告がある [12]。提案した手法は、これら望ましくない周期振動を不規則化させる可能性を示しており、応用が期待される。

### 文 献

- [1] M. Ogorzalek, "Taming chaos: Part II—control," IEEE Trans., vol.CAS-40, no.10, pp.700–706, 1993.
- [2] E. Ott, C. Grebogi, and J. Yorke, "Controlling chaos," Phys. Rev. Lett., vol.64, no.11, pp.1196–1199, 1990.
- [3] F. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, and W. Dayawansa, "Controlling chaotic dynamical systems," Physica, vol.D58, pp.165–192, 1992.
- [4] T. Ueta and H. Kawakami, "Composite dynamical system for controlling chaos," IEICE Trans., vol.E78A, no.6, pp.708–714, 1995.
- [5] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," Phys. Lett. A, vol.A170, pp.421–428, 1992.
- [6] K. Ogata, "Modern Control Engineering," 2nd. edition, Prentice-Hall International, 1990.



- [7] 勝田祐司, 川上 博, “対称性をもつ非線形自律系に見られる平衡点と周期解の分岐,” 信学論 (A), vol.J75-A, no.6, pp.1035-1044, 1992.
- [8] H. Kawakami and T. Ueta, “Controlling theory as applied to controlling chaotic dynamical systems,” IEICE Technical Report, NLP94-63, 1994.
- [9] 上田哲史, 川上 博, “高階自律系におけるカオス制御,” 信学技報, NLP94-70, 1994.
- [10] 吉永哲哉, 川上 博, 吉川研一, “水・油界面に生じる化学的非線形振動の回路モデル,” 信学論 (A), vol.J71-A, no.10, pp.1843-1851, 1988.
- [11] 藤井丈二, 中島弘之, 上田暁亮, “不安定制御を用いた周期軌道の学習,” 信学 '95 総大, A-75.
- [12] 西江 弘, “生命現象を説明するカオス,” 日経サイエンス, vol.246, no.3, pp.34-39, 1992.

(平成7年9月6日受付, 8年2月23日再受付)



高坂 拓司 (学生員)

平6徳島大・工・知能情報卒。平8同大大学院修士課程了。現在は同大博士後期課程在学中。非線形力学系の解析およびカオス制御に関する研究に従事。takuji@is.tokushima-u.ac.jp



上田 哲史 (正員)

平2徳島大・工・電子卒。平4同大大学院修士課程了。同年同大博士後期課程中退。同大・工・知能情報工学科助手。非線形力学系の解析とCG表現に関する研究に従事。計測自動制御学会, IEEE各会員。博士(工学)。tetsushi@is.tokushima-u.ac.jp



川上 博 (正員)

昭39徳島大・工・電気卒。昭44京大大学院博士課程了。同年京大助手。昭45徳島大助手。昭49同大助教授, 昭60同大教授。現在に至る。非線形回路の動的性質に関する研究に従事。工博。kawakami@ee.tokushima-u.ac.jp