

高次元自律系における Neimark-Sacker 分岐の一計算法

上田 哲史^{†a)} 吉永 哲哉^{††} 川上 博[†] 陳 関栄^{†††}

A Method to Calculate Neimark-Sacker Bifurcation in Autonomous Systems

Tetsushi UETA^{†a)}, Tetsuya YOSHINAGA^{††}, Hiroshi KAWAKAMI[†],
and Guanrong CHEN^{†††}

あらまし 自律系にみられるリミットサイクルにおいて、パラメータの変化により特性乗数が複素単位円を横切る場合、Neimark-Sacker 分岐を生じる。本論文ではこの分岐パラメータ値を求める新しい計算方法を提案する。固定点条件、Poincaré 断面条件に加えて、共役複素数の特性乗数を代入した特性方程式を実部と虚部に分離し、それぞれを独立した条件として採用する。これら条件式を連立させ、ニュートン法により解く。新たな独立変数として、共役複素な特性乗数の偏角を用いた。ニュートン法のヤコビ行列の各要素は、複素数演算、数値微分を用いることなく、変分方程式の解と行列操作によって求めることができるため、ニュートン法の収束性もよい。例として 8 次元自律系のリミットサイクルの Neimark-Sacker 分岐の計算結果をあげる。

キーワード 自律系, リミットサイクル, Neimark-Sacker 分岐, ニュートン法

1. ま え が き

常微分方程式で記述される力学系において平衡点、周期解が生じている場合、パラメータを変化させることにより平衡点、周期解の安定性が変化する現象、すなわち分岐現象が観測される。周期解の余次元 1 の分岐としては、接線分岐、周期倍分岐、Neimark-Sacker 分岐（以下、NS 分岐）があげられる。これら周期解の分岐が生じるパラメータを調べることは、周期解、準周期解やカオスの解析に重要である。

周期解の安定性の解析には、通常 Poincaré 写像法が用いられる。もとの連続的な解の流れは離散力学系へと変換され、周期解の安定性の吟味とは、この離散力学系の固定点や周期点に関する特性方程式の特性乗数を調べることに帰着される。

分岐パラメータ値は、一般に解析的に求めることが困難であるため、数値計算によって近似的に求められている。具体的には、固定点条件、Poincaré 断面の

条件、そして分岐が生じる特性乗数を代入した特性方程式を連立させ、ニュートン法などのシューティング法で解く方法が開発されている [2]。非自律系においては、その周期外力の周期と同期した Poincaré 写像を定義することによって比較的簡単に分岐パラメータを求めることができる。一方、自律系に生じる周期解（リミットサイクル）の場合は、一般にパラメータの変化により周期が変化するため、周期が未知数となった境界値問題となり、容易には求められない。いままでに筆者らは、周期を独立変数とみなし、リミットサイクルの接線分岐及び周期倍分岐をシューティング法で解く方法を提案した。しかしながら、NS 分岐については、3 次元以下の問題を除いては、本質的に複素演算を要求するため取り扱うことはできていなかった。

本論文では NS 分岐のパラメータ値の計算において、共役複素数である特性乗数の偏角を新たに独立変数と選んだ新しい手法について報告する。従来の方法と比べ、分岐条件式が少なく、特性方程式における解析的な代数演算を省略することができる。また、ニュートン法のヤコビ行列を求める上で、変分方程式の解を用いた行列操作で求めることが可能となった。本手法は、変分方程式を導出する以外の解析的な手間を省くことができるため、より汎用となっている。例題として 8 次元自律系のリミットサイクルの NS 分岐を検討した。

[†] 徳島大学工学部, 徳島県
Faculty of Engineering, Tokushima University, 2-1, Minami-Josanjima, Tokushima-ken, 770-8506 Japan

^{††} 徳島大学医療技術短期大学部, 徳島県
School of Medical Science, Tokushima University, 3-18-15, Kuramoto, Tokushima-ken, 770-8509 Japan

^{†††} ヒューストン大学, 米国
University of Houston, TX 77204-4793 USA

a) E-mail: tetsusi@is.tokushima-u.ac.jp

2. ポアンカレ写像

次式で記述される n 次元自律系を考える .

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

ここで, $t \in \mathbf{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, また, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ は, 状態 x とパラメータ $\lambda \in \mathbf{R}$ に関して C^∞ 級写像であるとする . 式 (1) の解は次式で表される .

$$x(t) = \varphi(t, x_0), \quad x(0) = x_0 = \varphi(0, x_0) \tag{2}$$

ここで, 系 (1) が周期 L のリミットサイクルをもつとする . リミットサイクルは初期値条件式 (2) を満たす . そこで x_0 を通り, 軌道に横断的な平面を Poincaré 断面 Π とする :

$$\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n \mid q(x) = 0\} \tag{3}$$

このとき, Poincaré 断面は次式で表される $(n-1)$ 次元の超平面である .

$$\begin{aligned} q: \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R} \\ q(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, q は次の条件を満たしていることに注意する .

$$\frac{\partial q}{\partial x} \cdot f \neq 0 \quad \text{for all } x \in \Pi \tag{5}$$

簡単のため, Poincaré 断面を \mathbf{R}^n の標準基底と平行にとる . Π 上の部分集合 $\hat{\Pi}$ を $x \in \Pi$ の近傍とすると, Poincaré 写像 T は,

$$\begin{aligned} T: \hat{\Pi} &\rightarrow \Pi \\ \hat{x} &\mapsto \varphi(\tau(\hat{x}), \hat{x}) \end{aligned} \tag{6}$$

となる . ここで, $\tau = \tau(\hat{x})$ は $\hat{x} \in \hat{\Pi}$ から出発した解が再び Π に交差する時刻で, 帰還時間という . 写像 T の固定点 x_0 は次式で満たす .

$$T(x_0) = x_0 \tag{7}$$

このときの周期 L は,

$$L = \tau(x_0) \tag{8}$$

で与えられる .

固定点周りの変分

$$x_k = x_0 + \xi_k \tag{9}$$

に対する変分方程式は,

$$\xi_{k+1} = J \xi_k, \quad J = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \tag{10}$$

となる . 一方, 式 (2) の初期値 x_0 に関する変分方程式は, 次の時変係数線形微分方程式となる .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{t=0} &= I_n \end{aligned} \tag{11}$$

ここで, I_n は $n \times n$ の単位行列である . したがって, 式 (10) における J は, 式 (11) の $t = \tau(x_0)$ における基本行列解となり, 具体的に式 (11) を Runge-Kutta 法などの数値積分法を適用して求められる .

変分方程式 (10) に関する特性方程式は,

$$\chi(\mu) = \det [J - \mu I_n] = 0 \tag{12}$$

となる . いま $\varphi(x)$ は周期解であるので, 式 (12) の根 (特性乗数) の一つは 1 となる . よって, 固定点の安定性は残りの $n-1$ 個の特性乗数により決定する . 固定点や分岐パラメータを計算する上で, \mathbf{R}^n 空間で問題を解こうとすると, この自明な特性乗数 1 に対応する冗長な条件が生じる . 例えば, 固定点の座標値の一つは, Poincaré 平面の一つの座標値と一致することなどである . そこで, 局所座標系 $\Sigma \in \mathbf{R}^{n-1}$ への写像を考え, その上での固定点の安定性を議論するとよい [4] . Π から Σ への射影は次式で与えられる .

$$\begin{aligned} \Pi &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid q(x) = 0\} \\ h: \Pi &\rightarrow \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1} \end{aligned} \tag{13}$$

この h は局所座標と呼ばれる . また, 埋込み写像 h^{-1} を次式で定義する .

$$h^{-1}: \Sigma \rightarrow \Pi \subset \mathbf{R}^n \tag{14}$$

局所座標系 Σ の部分集合 $\hat{\Sigma}$ を $\hat{u} \in \Sigma$ の近傍とする . $u = h(x)$, $u \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$ であるとき, Σ 上での Poincaré 写像 T_Σ は次式で与えられる .

$$\begin{aligned} T_\Sigma: \hat{\Sigma} &\rightarrow \Sigma \\ \hat{u} &\mapsto h(\varphi(\tau(h^{-1}(\hat{u})), h^{-1}(\hat{u}))) \\ &= h \circ T \circ h^{-1}(\hat{u}) \end{aligned} \tag{15}$$

写像 T_Σ の固定点 u_0 は次式を満たす .

$$T_\Sigma(u_0) = u_0 \tag{16}$$

このとき、次式が成り立つ。

$$q(\varphi(\tau(h^{-1}(u_0)), h^{-1}(u_0))) = 0 \quad (17)$$

また、 u_0 の特性乗数は、式 (12) の n 個の根のうち、1 を除いた他の $n-1$ 根と一致することに注意する [4]。

分岐問題とは、文献 [8] で示されているように、 Σ での固定点条件 (16)、Poincaré 切断面条件 (17)、及び、分岐の種類に応じた特性乗数を代入した特性方程式 (12) を連立して、固定点座標 u_0 、周期 L 、分岐パラメータ値 λ について解くことである。

3. NS 分岐の計算

NS 分岐は、 T_Σ の固定点の特性乗数が、共役複素数でかつ単位円を横切る分岐であり、分岐後、固定点周りに写像 T_Σ による不変閉曲線 (Invariant closed curve; ICC) が生じ、 R^n 空間では準周期解が観測される。特性乗数の偏角を θ としたとき、特性乗数 μ は、

$$\mu = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \neq 0, \pi \quad (18)$$

となる。ただし、 i は虚数単位である。いま、固定点の安定性を記号 ${}_kD$ を用いると、NS 分岐は次の分岐式で表される。

$${}_kD \Leftrightarrow {}_{k+2}D + \text{ICC} \quad (19)$$

ここで、 k は固定点の不安定次元を表す。

勝田 [3], [7] らは、NS 分岐の計算において、特性方程式を μ のべきに展開し、実部虚部に分け、 $u_0, \lambda, \cos \theta$ についてニュートン法で解く方法、また、その特性方程式から θ を代数演算で消去し、 u_0, λ 、について解く方法を提案している。しかし、高次元系の特性方程式における μ のべきの各係数は、変分方程式の基本行列解の各要素からなる高次の多項式となる。更に、ニュートン法の計算には特性方程式の各変数による微分が必要であるため、代数演算の手間の観点から高次元系での適用は困難である。

吉永ら [5] は、上記の方法において θ を消去せずに式 (12) の絶対値が最小になる θ の値を随時推定しながら解く方法を提案しているが、ニュートン法とは別に θ を推定する機構が必要があり、また、ニュートン法が収束しても実際は NS 分岐ではないことが起こり得る。

Doedel [6] らは、リミットサイクルの分岐計算について同様な手法を提案しているが、式 (1) や変分方程

式 (10) を差分法と選点法により算出して用いている。このためニュートン法のヤコビ行列へ誤差が混入することは本質的に避けられない。また、未知変数である再帰時間でのスケーリングや、境界条件、正規化条件など、条件式が多くなる上、特性乗数を複素数として扱っているため、基本的に複素数を扱える計算機言語を用いなければならない。

本論文では、NS 分岐の計算において、新たに偏角 θ を独立変数として扱い、ニュートン法で算出する方法を提案する。本手法では、

- ニュートン法における方程式数が少ない
- 数値微分 (差分) は不要である
- 複素演算を必要としない
- 独立変数が多いので、収束性がよい

などの特徴をあげることができる。

行列式 (12) に対して、次に示す行列式の多重線形性を利用することを考える。まず、任意の n 次正方形行列 X を n 個の列ベクトルで表すと、

$$X = [x_1 | x_2 | \cdots | x_n] \quad (20)$$

となる。そのとき、任意の n 次元列ベクトル γ について、 $1 < k < n$ に対し、

$$\begin{aligned} \det[x_1 | \cdots | x_k + \gamma | \cdots | x_n] \\ = \det[x_1 | \cdots | x_k | \cdots | x_n] \\ + \det[x_1 | \cdots | \gamma | \cdots | x_n] \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立つ。また、 $\alpha \in R$ のとき、

$$\begin{aligned} \det[x_1 | \cdots | \alpha x_k | \cdots | x_n] \\ = \alpha \det[x_1 | \cdots | x_k | \cdots | x_n] \end{aligned} \quad (22)$$

であることに注意しておく。

基本行列解 J を、列ベクトルを用いて

$$J = [j_1 | \cdots | j_n] \quad (23)$$

と表すことにする。また、 e_k を k 番目の要素が 1 である単位ベクトルとする。このとき、特性方程式 $\chi(\mu)$ は、

$$\chi(\mu) = \det[j_1 - \mu e_1 | \cdots | j_n - \mu e_n] \quad (24)$$

となる。

操作 1. 式 (24) に式 (21) を適用し、展開する。これは、次のアルゴリズムで実現される。 p を n ビット 2 進数とし、 n 次正方形行列の列とビット位置を 1 対 1 対

応させ、初期値は全ビット0とする。\$0 \le \ell \le n\$ のすべての \$\ell\$ について、行列 \$J\$ の \$n\$ 本の列ベクトルのうち、重複なく \$\ell\$ 本選び、その列の添字 \$k\$ に合わせて、\$j_k\$ を \$-\mu e_k\$ に置換することにより行列 \$\hat{J}(p)\$ を得る。ここで、置換した列に合わせて \$p\$ の対応するビットを1と置く。\$\hat{J}(p)\$ の総数は、\$2^n\$ 個となる。

操作2. 操作1. で得られた \$\hat{J}(p)\$ のそれぞれに対して、式(18)を代入し、式(21)を適用する。これは、次のアルゴリズムで実現される。ある \$\hat{J}(p)\$ に注目したとき、\$p\$ の \$m\$ 個のビットが1、すなわち、\$m\$ 本の列ベクトルが \$-\mu e_k\$ であるとする。このとき、\$m\$ ビットの2進数 \$r\$ を用意する。\$p\$ の1であるビット位置と、\$r\$ のビット位置との1対1対応を取っておく。式(18)より、\$\mu e_k = \cos \theta e_k + i \sin \theta e_k\$ であるから、列ベクトル \$-\mu e_k\$ を、\$-\cos \theta e_k\$ に置換、または、\$-i \sin \theta e_k\$ に置換する作業をもれなく行う。前者の置換で \$r\$ の対応ビットを0に、後者では1に設定することにより、これらの置換で生成される個々の行列は \$\hat{J}(p, r)\$ と書くことができる。固定した \$p\$ に対して、\$\hat{J}(p, r)\$ は計 \$2^m\$ 個生成される。

操作2を、操作1で得られる全行列について行くと、生成された行列 \$\hat{J}(p, r)\$ の総数は、

$$N = \sum_{\ell=0}^n 2^\ell \binom{n}{\ell} \quad (25)$$

となる。

\$\hat{J}(p, r)\$ の \$m\$ 列のうち、\$s\$ 列が \$-i \sin \theta e_k\$ であるとき、その行列式の計算においては、性質(22)より、\$i^s \in \{1, -1, i, -i\}\$ が係数としてくり出されるので、値は、実数か純虚数かのどちらかとなる。よって、\$\hat{J}(p, r)\$ の集合は、行列式が実となる実行列と、行列式が純虚数となる実行列に分けることができる。結局、特性方程式は次式で示す行列式の和に展開できる。

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= \Re(\chi(\mu)) + i\Im(\chi(\mu)) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N_R} \det A_\ell + i \sum_{\ell=0}^{N_I} \det B_\ell \end{aligned} \quad (26)$$

$$N = N_R + N_I$$

これら \$A_\ell, B_\ell\$ の一般式は繁雑になるため省略したが、計算機上では、\$\hat{J}(p, r)\$ 中から虚数単位を省略した行列を \$N\$ 個すべて記憶しておき、行列式の計算のあと、\$i^s\$ を評価することにより、形式的に式(26)を表現することができる。記憶した行列は、特性方程式の微分の際に再利用する。

以上の手続きで、特性方程式を \$\mu\$ の多項式に展開することなく、また、複素数演算を行うことなく、特性方程式を実部と虚部に分けることができた。そこで、それぞれをNS分岐の独立した方程式とみなし、固定点条件(16)、切断面条件(17)と連立させてNS分岐条件式とする。

$$F = \begin{bmatrix} T_\Sigma(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \\ q(h^{-1}(\mathbf{u})) \\ \Re(\chi) \\ \Im(\chi) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (27)$$

この \$n+2\$ 個の連立方程式を、ニュートン法を用いて \$\mathbf{u}, \lambda, \tau, \theta\$ について解く。ベクトル \$\mathbf{v}\$ を

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \lambda, \tau, \theta)^\top \quad (28)$$

と構成した場合のニュートン法の反復アルゴリズムは次式で表される。

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + \boldsymbol{\eta}^{(k)} \\ D\mathbf{F}(\mathbf{v}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{\eta}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{v}^{(k)}) \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (29)$$

ここで \$D\mathbf{F}(\mathbf{v}^{(k)})\$ はヤコビ行列であり、次式で与えられる。

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \frac{\partial h^{-1}}{\partial \mathbf{u}} - I_{n-1} & \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} & \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \frac{\partial h^{-1}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} & \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \Re}{\partial x_0} & \frac{\partial \Re}{\partial \lambda} & \frac{\partial \Re}{\partial \tau} & \frac{\partial \Re}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \Im}{\partial x_0} & \frac{\partial \Im}{\partial \lambda} & \frac{\partial \Im}{\partial \tau} & \frac{\partial \Im}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(29)の停止条件は、十分小さい残差 \$\epsilon\$ を定義して、

$$\|\boldsymbol{\eta}\| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (31)$$

とする。ここで \$\|\cdot\|\$ はノルムである。

ヤコビ行列中の、式(27)における第1式、第2式に関する微分の項は、基本行列解(10)や式(1)の解そのものを用いる。特性方程式(26)は、各変数についての微分が必要になるが、行列式の多重線形性を用いて \$\hat{J}(p, r)\$ に対して置換操作を行い、行列式を取ることにより微分することができる。その際に、第2変分

方程式（時変係数の線形微分方程式）の基本行列解を用いる [7]。式 (21) の u, λ, τ に関する微分の詳しい説明は、文献 [8] で述べられている。

変数 θ による微分も同様に、行列の列置換操作と行列式演算で実現できる。例えば、 $\hat{J}(p, r)$ の θ に関する微分は、各列ベクトルに対して、もしもその列が $-\cos \theta e_k, -i \sin \theta e_k$ であれば、その列ベクトルを、それぞれ $\sin \theta e_k, -i \cos \theta e_k$ に置換し、そうでなければ 0 ベクトルに置換して得られた計 n 個の行列の行列式の和となる。

連立方程式 (29) は複素数を含んでいないので、複素数データ型・演算をもたない多くの計算機言語で記述・計算が可能である。また、ヤコビ行列の計算にも、変分方程式の解を用いて行列操作と行列式演算のみで求めることができる。数値微分、数値差分を含んでないので、ニュートン法の収束性はよい。ところで、式 (10) におけるヤコビ行列 $\partial \varphi / \partial x_0$ の各要素は、式 (1) の導関数で与える必要がある。数式処理言語を用いてこの手間を省くことが今後の課題である。

4. 適用例

ここでは Wilson-Cowan モデルによる 2 次元ニューロン発振器を 4 組環状に結合した系を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= -x_k + S(ax_k - by_k + \rho_x + \delta(x_{k-1} + x_{k+1})) \\ \frac{dy_k}{dt} &= -y_k + S(cx_k - dy_k + \rho_y - \delta(y_{k-1} + y_{k+1})) \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $k = 1, 2, 3, 4(\text{mod } 4)$ であり、 S は次式で表されるシグモイド関数である。

$$S(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} \quad (33)$$

以下では、 $a = 10, d = -2, \rho_x = 0, \rho_y = -6$ と固定する。

力学系 (32) では、適当なパラメータ値で様々な同期モードをもった安定なリミットサイクルが生じるが、結合度 δ が大きくなると、それらは NS 分岐によって不安定となることがある。安定な同期モードのパラメータ平面における安定領域は NS 分岐によって移り変わり、また、NS 分岐に伴う不安定な準周期解やそれが進展したカオス振動も観察される。Hoppensteadt

らは、系 (32) に対して、 δ が小さいと仮定し平均化法を用いた場合の周期解の安定性、同期モードの解析を行っている [9]。しかし、 δ が大きい場合については、解析的手法は用いることができない。よって、強い結合での系 (32) の振舞いの定性的性質の解明のため、NS 分岐集合を、任意のパラメータ平面で計算することは重要である。

$x_e \in R^8$ を系 (32) の平衡点とする。この平衡点の Hopf 分岐によってリミットサイクルが生じるため、この平衡点の座標値と一致する超平面を Poincaré 断面と選ぶと、ほとんどの場合軌道と横断的となる。ここでは、

$$\Pi = \{x \in R^8 \mid q(x) = x_1 - x_{1e} = 0\} \quad (34)$$

と選んだ。ここで $x_{1e} \in R$ は平衡点 x_e の x_1 座標値である。

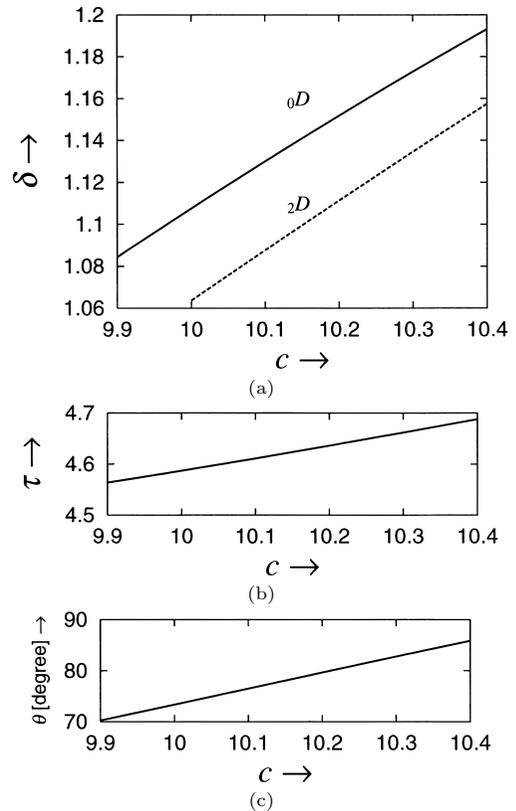


図 1 分岐パラメータの計算結果。(a) c - δ 平面での分岐図、(b) 周期、(c) 複素偏角

Fig. 1 Results of calculation. (a) Bifurcation diagram in c - δ plane, (b) period, (c) argument of the complex multiplier.

ニュートン法へ与える各変数の初期値は、固定点を追跡するアルゴリズム [1] を使用し、特性乗数が複素共役で単位円近くになるパラメータ値における近似値を用いた。式 (32) の解軌道及び第 1, 第 2 変分方程式

の基本行列解は、Runge-Kutta 法を用いて求積する。そのときの刻み幅は、帰還時間の $\frac{1}{256}$ とした。

図 1 は、 (x_2, y_2) と (x_4, y_4) が同相同期したりミットサイクルについて、 c - δ 平面で求めた分岐図である。実線は固定点 ${}_0D$ - ${}_2D$ に関する NS 分岐集合である。 δ が減少する方向にパラメータを変化させ、この分岐集合を越えると、 ${}_0D$ は ${}_2D$ と変化し、固定点は 2 次元不安定となる。この分岐に伴って発生する準周期解は、安定には存在し続けることができず、解軌道は各発振器が同相となるモードに引き込まれる。点線は ${}_2D$ - ${}_4D$ に関する NS 分岐集合であり、図 3 で示すように、非常に近接して ${}_4D$ - ${}_6D$ に関する NS 分岐集合が存在することがわかる。

表 1 は、 ${}_2D$ 型固定点の NS 分岐パラメータの計算例を示している。各変数には、64 ビット倍精度実数型を用いた。ニュートン法への初期値は大雑把に与えた

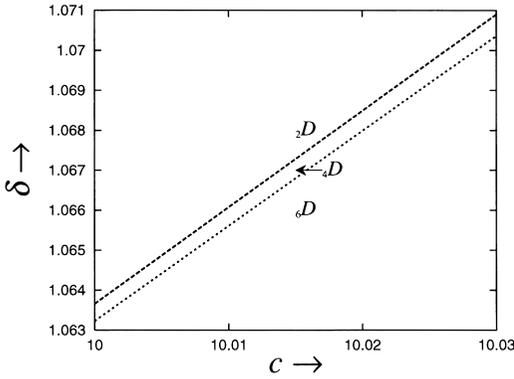


図 2 図 1(a) の拡大図
Fig. 2 Enlargement of Fig. 1.

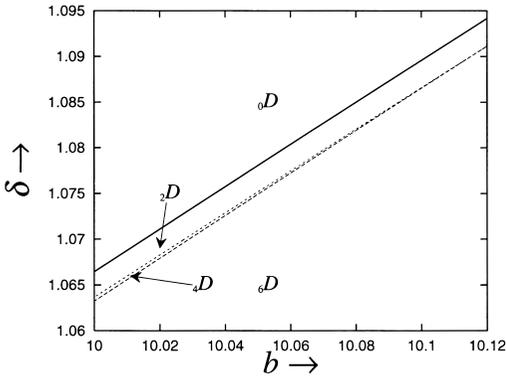


図 3 b - δ 平面での分岐図
Fig. 3 Bifurcation diagram in b - δ plane.

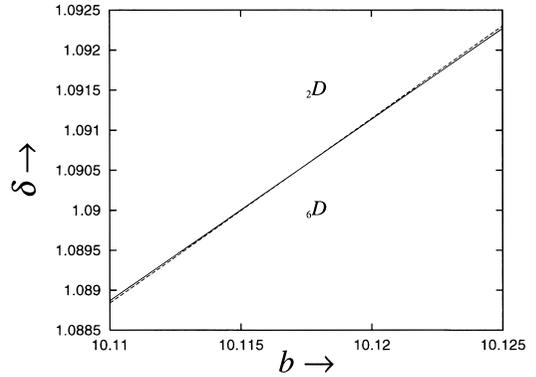


図 4 図 3 の拡大図。二つの NS 分岐集合が交差している
Fig. 4 Enlargement of Fig. 3. Two NS bifurcation sets are intersected.

表 1 系 (32) にみられる NS 分岐の計算結果の一例

Table 1 A calculation example of the NS bifurcation in Eq.(32).

固定パラメータ	$a = 10, b = 10, c = 10, d = -2, \rho_x = 0, \rho_y = -6$		
初期値	$x(0) = (0.74, 0.578, 0.768, 0.731, 0.77, 0.758, 0.768), \delta = 1.065, \theta = 0.94, \tau = 5.265$		
平衡点	$x_e = (0.748162, 0.798637, 0.748162, 0.798637, 0.748162, 0.798637, 0.748162, 0.798637)$		
許容残差	$\epsilon = 10^{-12}$		
反復回数	5 回		
固定点	$x_0 = (0.748162, 0.577855, 0.768437, 0.731445, 0.778162, 0.758620, 0.768437, 0.731445)$		
分岐パラメータ	$\delta = 1.063658061$		
周期	$L = 5.2711267199$		
偏角	$\theta = 0.94405318$		
$\mu_1, \bar{\mu}_1$	$0.586510 \pm i0.809941$	$(1.000000 \angle \pm 0.944053)$	$(\pm 54.090262^\circ)$
$\mu_2, \bar{\mu}_2$	$0.948152 \pm i0.502724$	$(0.990490 \angle \pm 0.486801)$	$(\pm 27.891651^\circ)$
$\mu_3, \bar{\mu}_3$	$-0.075284 \pm i0.987624$	$(1.073184 \angle \pm 1.646877)$	$(\pm 94.359095^\circ)$
μ_7	1.000000		
μ_8	0.126578		

が, 5 回の反復によって, 許容残差で指定した精度に収束している. 単位円の近傍に多くの特性乗数が配置しているが, θ を独立変数に取っていることから選択的に計算が行えている.

同種類のリミットサイクルについて, $c = 10$ に固定し, b - δ 平面において NS 分岐を求めた図が図 3 である. 図 1 と同様な分岐構造であるが, ${}_2D$ - ${}_4D$ に関する分岐集合と ${}_4D$ - ${}_6D$ に関する分岐集合が交差する. 図 4 は, 図 3 の拡大図であり, 交差する二つの分岐集合に挟まれた領域に ${}_4D$ が存在する. この例でも特性乗数のほとんどが単位円近傍に配置されるが, 注目する偏角を連続的に追跡できるため, 安定に計算が進められる.

5. む す び

本論文では, 自律系におけるリミットサイクルの NS 分岐について, その分岐パラメータを求める手法について述べた. 複素数演算を排除し, 数値微分を用いずニュートン法のヤコビ行列を求めた. その結果汎用的で, かつ収束性のよい計算アルゴリズムが得られた. 今後は, 区分非線形系 [10] で見られる NS 分岐の計算への応用などが挙げられる.

文 献

- [1] H. Kawakami and K. Kobayashi, "A computation of periodic solutions of nonlinear autonomous systems," Proc. of ISCAS'79, pp.44-45, Tokyo, Japan, 1979.
- [2] Y.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New York, AMS-112, 1998.
- [3] 勝田祐司, 対称性を有する非線形回路の解析, 徳島大学博士論文, 1995.
- [4] 勝田祐司, 川上 博, "対称性をもつ非線形自律系に見られる平衡点と周期解の分岐," 信学論 (A), vol.J75-A, no.6, pp.34-43, June 1993.
- [5] 吉永哲哉, 川上 博, "高次元力学系における Hopf 分岐集合の計算方法," 電気関係学会四国支部連合大会, p.10, 1994.
- [6] E.J. Doedel and J.P. Kernévez, AUTO: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations with Applications, Applied Mathematics, California Institute of Technology, 1986.
- [7] H. Kawakami, "Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits," IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS-31, no.3, pp.248-259, March 1984.
- [8] T. Ueta, M. Tsueike, H. Kawakami, T. Yoshinaga, and Y. Katsuta, "A computation of bifurcation parameter values for limit cycles," IEICE Trans. Funda-

mentals, vol.E80-A, no.9, pp.1725-1728, Sept. 1997.

- [9] F.C. Hoppensteadt and E.M. Izhikevich, Weakly Connected Neural Networks, Springer, AMS 126, 1997.
- [10] T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, "Bifurcation of switched nonlinear dynamical systems," IEEE Trans. Circuits & Syst. II, vol.CAS-II, no.7, pp.878-885, July 1999.

(平成 12 年 2 月 2 日受付, 5 月 23 日再受付)



上田 哲史 (正員)

平 2 徳島大・工・電子卒. 平 4 同大大学院修士課程了. 同年徳島大・工・知能情報工学科助手. 平 9 講師, 現在に至る. 平 10 米国ヒューストン大客員研究員. 非線形力学系の解析と視覚化に従事. 博士 (工学).



吉永 哲哉 (正員)

昭 59 徳島大・工・電子卒. 昭 61 同大大学院修士課程了. 平 1 徳島大・医療技術短期大学部・助手. 平 8 同大・工・電気電子・助教授. 平 11 同大・医療技術短期大学部・助教授, 現在に至る. 非線形力学系に見られる分岐現象の解析及び医用工学に関する研究に従事. 博士 (工学).



川上 博 (正員)

昭 39 徳島大・工・電気卒. 昭 44 京大大学院博士課程了. 同年京大助手. 昭 45 徳島大助手. 昭 49 同大助教授. 昭 60 同大教授, 現在に至る. 非線形回路の動的性質に関する研究に従事. 工博.



陳 関栄

received the M.Sc. degree in Computer Science from Sun Yatsen University and the Ph.D. degree in Applied Mathematics from Texas A&M University. Currently he is a tenured Full Professor in the Department of Electrical and Computer Engineering, University of Houston, Texas. He is a Fellow of the IEEE since 1996.