

指定した偏角を有する固定点の計算とその応用

辻 繁樹^{†a)}(学生員) 上田 哲史[†](正員)

吉永 哲哉^{††}(正員) 川上 博[†](正員)

A Calculation Method of the Fixed Point with a Specified Argument and Its Application

Shigeki TSUJI^{†a)}, Student Member, Tetsushi UETA[†],

Tetsuya YOSHINAGA^{††},

and Hiroshi KAWAKAMI[†], Regular Members

[†] 徳島大学工学部, 徳島市

Faculty of Engineering, Tokushima University, 2-1 Minami-Josanjima, Tokushima-shi, 770-8506 Japan

^{††} 徳島大学医療技術短期大学部, 徳島市

School of Medical Sciences, Tokushima University, 3-18-15 Kuramoto, Tokushima-shi, 770-8509 Japan

a) E-mail: shigeki@is.tokushima-u.ac.jp

あらまし 非線形力学系において, 系に含まれるパラメータが変化し, 固定点の特性乗数が複素単位円外に出ることにより各種の局所的分岐現象を生じる. 本報告では, 複素共役な特性乗数をもつ固定点に対して, 偏角を指定してその位置, 動径, パラメータ値を数値計算する方法を述べる. また, その応用として, Neimark-Sacker 分岐パラメータ値を求める計算方法を提案する.

キーワード 固定点, 偏角, Neimark-Sacker 分岐, ニュートン法

1. まえがき

非線形常微分方程式で記述される力学系では, パラメータの変動により, 周期解の Neimark-Sacker (NS) 分岐を経て, 準周期振動が観測されることがある. 更に, この準周期振動は, Arnold tongue で特徴づけられる同期引込み現象によって, 様々な周期解に同期する [1]. また, しばしばトールス崩壊ルートによるカオスの発生をみる. NS 分岐は, 計算方法が確立されており [2], [3], 分岐後に発生する準周期解の周期引込み領域と NS 分岐との関係も調べられている [4].

本論文では, 連続力学系のポアンカレ写像または離散力学系を対象とし, 指定した偏角をもつ固定点 (周期点) の等高線をパラメータ平面で計算する方法を提案する. 固定点条件, 共役複素数の特性乗数を代入した特性方程式を実部と虚部に分離し, それぞれを独立した条件として連立させ, ニュートン法で固定点位置, パラメータ値について解く. また, この手法の応用として, 指定した偏角をもつ NS 分岐を求める手法について述べる. これらのツールにより, 固定点と NS 分岐, 周期引込み領域との関係をより直接的に調べるこ

とができる.

2. 等高線の計算

写像 T が次式で記述されるとする:

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad u \mapsto T(u), \quad u \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

ここで, T は二つのパラメータ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ 及び $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ について必要なだけ微分可能であるとする. T の固定点 $u_0 \in \mathbb{R}^n$ は,

$$T(u_0) = u_0 \quad (2)$$

を満たす点である. T の m -周期点については,

$$T^m(u_0) = u_0 \quad (3)$$

を満たす T^m の固定点 u_0 を考えることに帰着される.

今, 固定点が複素共役な特性乗数をもつと仮定する. 固定した偏角 θ をもつ固定点の位置とパラメータ値を求めると, その解集合は, パラメータ平面で等高線 (isocline) を成す.

写像 T の固定点におけるヤコビ行列を J とする. 特性方程式は, 複素数の特性乗数であることより,

$$\chi = \det[J - re^{i\theta} I_n] = \Re\chi + i\Im\chi = 0 \quad (4)$$

で与えられる. ここで, i は虚数単位, r は動径, I_n は $n \times n$ の単位行列である. また, $\Re\chi, \Im\chi$ はそれぞれ特性方程式の実部と虚部を表す. 指定した偏角 $\theta = \theta^*$ をもつ固定点を求めるには, 次式を $(u, \lambda_1, r) \in \mathbb{R}^{n+2}$ についてニュートン法で解けばよい.

$$F = \begin{pmatrix} T(u) - u \\ \Re\chi \\ \Im\chi \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

このとき, ヤコビ行列は,

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial u_0} - I_n & \frac{\partial T}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial \Re\chi}{\partial u_0} & \frac{\partial \Re\chi}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Re\chi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Im\chi}{\partial u_0} & \frac{\partial \Im\chi}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Im\chi}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (6)$$

であり, 各要素は変分方程式の求積解を用いる [2]. θ を区間 $[0, \pi]$ 内の特定の値に固定し, λ_2 を増分パラメータとして, 式 (5) の解 λ_1 をプロットすれば, 等高線が得られる. まず, $\theta = 0, \theta = \pi$ と指定して解くことにより, 固定点の存在領域のうち, 固定点が結

節点である領域と沈点である領域を分けることができる。これは、根軌跡において、根が実軸から離れる臨界点のパラメータを与えているともいえる。その他の偏角の等高線においては、固定点周りの過渡応答に関する特定の瞬時位相を与えており、次章で述べる NS 分岐、周期解の分岐に深く関与している。

3. NS 分岐の計算

次に、等高線計算の応用として、式 (5) において r を 1 に固定して NS 分岐を求めることを考える。二つのパラメータ λ_1, λ_2 を選んで、偏角を $\theta = \theta^*$ と固定し、式 (5) を $(u, \lambda_1, \lambda_2) \in R^{n+2}$ について解けば、NS 分岐値が求まる。この分岐は余次元 1 の分岐であるため、分岐集合は 2-パラメータ平面では曲線を成す。そこで、偏角 θ を増分パラメータに選び、区間 $[0, 2\pi]$ 内で変化させることによって NS 分岐曲線を追跡することができる。このとき、ヤコビ行列は次式となる。

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial u_0} - I_n & \frac{\partial T}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial T}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial \Re \chi}{\partial u_0} & \frac{\partial \Re \chi}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Re \chi}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial \Im \chi}{\partial u_0} & \frac{\partial \Im \chi}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \Im \chi}{\partial \lambda_2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

従来手法では偏角は NS 分岐計算に関与せず、 λ_1 を変数にして、 λ_2 は増分パラメータとし、NS 分岐の計算後に偏角を算出していた。また、文献 [3] では θ を独立変数にも選んでいるが、ニュートン法の変数となるパラメータは一つである。そのため、NS 分岐パラメータ値が求まったとき、増分パラメータの変化のさせ方は、予測子修正子法を使うなどの工夫が必要である。

それに対し本手法は、NS 分岐が θ によってパラメータづけられることを利用し、 θ とは別の二つのパラメータをニュートン法の変数とし、 θ は増分パラメータと選ぶことが可能となっている。したがって、計算アルゴリズムは、パラメータ平面内の分岐曲線の形状の変化に影響を受けないため、増分パラメータである θ のステップ幅の制御は基本的に不要となる。また、余次元 2 の分岐点（接線分岐と NS 分岐の重複、周期倍分岐と NS 分岐の重複）においても、ヤコビ行列 (7) が非正則とならず、ニュートン法の反復計算が発散することはない。

周期解の接線分岐曲線は、Arnold tongue で特徴づけられるように、周期引込み領域がカスプ点となって NS 分岐曲線に接続される。整数 p と q を任意に選ん

だとき、 $\theta = \pi p/q$ で与えられる偏角をもつ NS 分岐値を得ると、その値は、対応する引込み領域のカスプ点も与える可能性がある。本手法による NS 分岐の計算結果は、もしも同期化領域が NS 分岐曲線に接続するのであれば、そのカスプ点を精度良く与えたことと等価となり、周期解引込み領域の計算に際する重要な情報となる。

4. 適用例

次の離散系を考える。

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + ax_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_1^2(k) + b \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

ここで、 a, b はパラメータである。固定点に関する変分方程式の基本行列解を X としたとき、特性方程式は

$$\begin{aligned} \Re \chi &= r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - r \cos \theta \operatorname{tr} X + \det X \\ \Im \chi &= 2r \cos \theta - \operatorname{tr} X \end{aligned} \quad (9)$$

となり、ヤコビ行列 (6), (7) のすべての要素は容易に計算できる。

系 (8) において、いくつかの偏角の等高線及び NS 分岐曲線 NS を、提案手法で求めた結果を図 1 に示す。この図には、 m -周期点の接線分岐 G^m 及び周期倍分岐 I^m を従来手法で求め、図に重ね合わせてある。

NS 分岐は、 $\theta = 0$ において、 $(a, b) = (2, 0.25)$ と計算され、接線分岐との余次元 2 の分岐となっている。 θ を徐々に増やしていくことによって NS 分岐の曲線

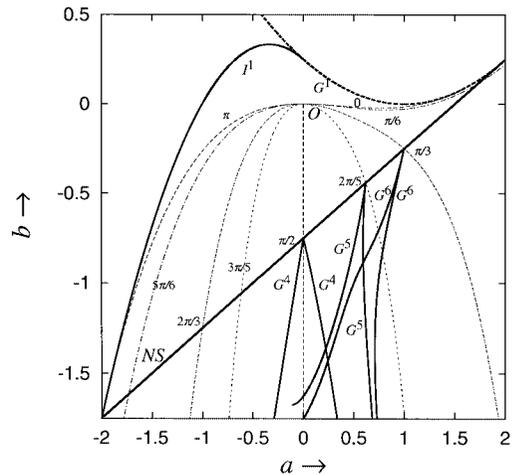


図 1 式 (8) の分岐集合及び等高線
Fig. 1 Bifurcation diagram of Eq.(8).

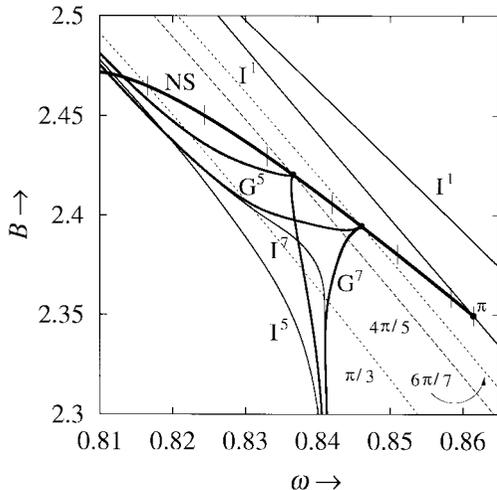


図2 式(10)の分岐集合及び等高線
Fig.2 Bifurcation diagram of Eq.(10).

を得る。 $\theta = \pi$ で $(a, b) = (-1.75, -2)$ となり、周期倍分岐に接続している。つまり、安定な固定点は、 I^1 , G^1 , NS で囲まれた領域で存在する。

図から、各偏角の等高線は、原点から放物線状に分岐している。 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の等高線、及び I^1 , G^1 で囲まれた領域では、特性乗数は実軸上に配置し、よって固定点は結節点となることがわかる。NS 分岐曲線と、 $\pi/2$, $2\pi/5$, $\pi/3$ の各等高線の交点には4周期、5周期、6周期解の接線分岐曲線のカスプが接続している。なお、この系では、NS 分岐曲線は理論的に $b = 0.5a - 0.75$, $-2 \leq a \leq 2$ と与えられるので、計算結果の正当性が確認できる。

また、連続時間系についても提案手法を適用した。ニューラル発振器のモデルの一つである次の2次元非

自律系を考える。

$$\dot{x}_1 = 10f(x_1) - 10f(x_2) - 2.5 + B \cos \omega t$$

$$\dot{x}_2 = 10f(x_1) + 2f(x_2) - 9.0$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (10)$$

この系では $B = 0$ の自律系においてリミットサイクルが存在し、 B や ω の値に応じて、準周期解の発生や、周期解への同期引込みが観測される。そこで状態を、時刻 $2\pi/\omega$ ごとで離散化、ポアンカレ写像 T を構成し、 ω - B 平面において等高線及び分岐曲線を計算した。図2参照。離散系(8)と同様な構造が示されている。

5. むすび

本論文では、固定点の特性乗数が指定した偏角をもつ等高線の計算及び、NS 分岐パラメータの計算方法を述べ、離散系、連続系のそれぞれの例について計算結果を示した。本手法で求めた特定の偏角をもつ NS 分岐点の情報をもとに周期解引込み領域を自動で追跡する手法の開発が今後の課題である。

文 献

- [1] Y.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, 2nd ed., AMS 112, Springer, 1998.
- [2] H. Kawakami, "Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits," IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS-31, no.3, pp.248-260, 1984.
- [3] 上田哲史, 吉永哲哉, 川上 博, 陳 関栄, "高次元自律系における Neimark-Sacker 分岐の一計算法," 信学論(A), vol.J83-A, no.10, pp.1141-1147, Oct. 2000.
- [4] 北島博之, 川上 博, "周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について," 信学論(A), vol.J80-A, no.3, pp.491-498, March 1997.

(平成12年8月9日受付, 11月8日再受付)