

断続自律系方程式における分岐のしきい値解析

伊藤 大輔<sup>†a)</sup>      上田 哲史<sup>††b)</sup>      合原 一幸<sup>†††c)</sup>

Bifurcation Analysis with Threshold Values for Interrupt Autonomous Systems

Daisuke ITO<sup>†a)</sup>, Tetsushi UETA<sup>††b)</sup>, and Kazuyuki AIHARA<sup>†††c)</sup>

あらまし スイッチや状態変数の跳躍で表される断続力学系の研究が盛んに行われている。複数の異なるベクトル場が接合して力学系を構成する場合、しばしばしきい値が接合面（断続面）の位置を決める条件となる。系に現れる周期軌道は、しきい値をパラメータとしたとき、その値の変化に対して様々な分岐現象を生じる。状態変数やパラメータが断続面において微分不可能となる断続系では、従来の解析手法の適用に困難をもたらすが、断続面を局所断面とし局所座標系を構成するポアンカレ写像を定義すれば、シューティング法による分岐解析が行えることが示されている。しかしながら、しきい値の定義は一般にモデル方程式に陽に含まれないため、分岐パラメータ値としてのしきい値に対するシューティング解法は知られていない。本論文では、断続系の分岐理論を拡張し、しきい値をパラメータとする変分方程式を導出し、求積する手法について述べる。更に、具体例として結合 Izhikevich ニューロンモデルを取り上げ、分岐構造の詳細を説明する。

キーワード 断続力学系, ポアンカレ写像, しきい値解析, 結合 Izhikevich モデル

1. ま え が き

神経ネットワークや遺伝子ネットワーク、電気回路系などの非線形力学系では、周期解やカオス、更にはそれらに関連した複雑な分岐現象が見られる。系を記述する数理モデルが得られたとき、パラメータ依存性を分岐構造として解析することは、系の挙動や安定性を理解する上で重要な情報となる。分岐問題を調べる上で有効な手法の一つにシューティング法がある [1], [2]。この手法は、固定点方程式及び特性乗数を指定した特性方程式の連立方程式について、状態変数及びパラメータを数値的に解くものである。数値解法としてはニュートン法 [3] や選点法 [4] が用いられるが、前者で

はヤコビ行列が変分方程式の求積結果として得られるため、アルゴリズムの実装が単純となる利点がある。

スイッチの動作や衝突運動が生じる系では、断続特性、すなわち、連続性や可微分性が失われる特性が含まれる力学系を考えねばならない。例えば、ニューロンの発火現象をモデル化した Izhikevich モデルでは、発火後のリセット動作が状態の跳躍として系に含まれるため [5]、力学系は条件文を含むものとなる。上田らが提案したニュートン法による解析方法 [1] は、力学系が状態変数及びパラメータについて十分滑らかであることを要求するため、断続系の解析には直接は適用できない。他方で、断続力学系に対して様々なアプローチが行われている。断続特性として区分線形系を対象にしたものでは、斉藤らは、跳躍のある系の結合系を対象に、区分線形ベクトル場をもとにしたリターンマップを定義し、同期状態に関する分岐現象を解析している [6]。また、断続力学系を解析するため、部分空間を厳密に定義し、それぞれの部分空間に対応するリターンマップ構成して、それらを合成することで系全体のリターンマップを構成することができることが示されている [7], [8]。

高坂らは断続特性を含む非線形力学系におけるリミットサイクルの分岐問題について数値解析の一手

<sup>†</sup> 徳島大学大学院先端技術科学教育部システム創生工学専攻, 徳島市 Faculty of Engineering, The University of Tokushima, 2-1 Minamijyousanjima-cho, Tokushima-shi, 770-8506 Japan

<sup>††</sup> 徳島大学情報化推進センター, 徳島市 Center for Administration of Information Technology, The University of Tokushima, 2-1 Minamijyosanjima-cho, Tokushima-shi, 770-8506 Japan

<sup>†††</sup> 東京大学生産技術研究所, 東京都 Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8505 Japan

a) E-mail: d-ito@is.tokushima-u.ac.jp

b) E-mail: tetsushi@is.tokushima-u.ac.jp

c) E-mail: aihara@sat.t.u-tokyo.ac.jp

法 [9] を提案している．この手法では，スイッチが切り換わるしきい値で表される，ベクトル場が不連続に切り換わる条件（断続面）をポアンカレ断面とし，断続面内の局所座標におけるポアンカレ写像を定義する．この写像は連続であり，導関数である変分も求積できる．区間的なポアンカレ写像の合成写像として，系全体を表すことによって系の変分もまた求積できる．よってニュートン法により，分岐問題を解くことが可能となり，パルスやヒステリシス，跳躍特性をもつ系も取り扱うことができる [10], [11]．しかしながら，解析対象は微分方程式に陽に含まれるパラメータについて分岐問題が取り扱われており，断続特性に関するパラメータについての定性的解析はあまり見られない．このようなパラメータについて調べることは，スイッチをはじめとする断続特性が系に与える影響を調べるとい意味でも大変重要である．また，リミットサイクルが通過する断続面が複数ある場合の分岐現象の詳細な解析もあまり見られない．

本論文では，断続系におけるポアンカレ写像としきい値の関係を整理し，変分方程式を拡張した断続特性のしきい値による周期倍分岐，接線分岐の解析手法を述べる．次に複数の断続面をもつ例として結合 Izhikevich モデルを取り上げ，そのしきい値に関する分岐解析を行う．

## 2. 断続特性のしきい値に関する解析

### 2.1 問題の記述

式 (1) で定義される  $m$  個の区分的に連続な非線形関数に従った， $n$  次元自律系を考える．

$$\frac{dx}{dt} = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1)$$

ここで， $t \in \mathbf{R}$  は時間， $x \in \mathbf{R}^n$  は状態変数を表す． $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  は全ての状態変数に対して必要な回数だけ微分可能な写像とする．各写像  $f_k$  が適用される空間はその空間が挟まれる 2 個の断続面によって定義される．適用されるベクトル場が  $f_{k-1}$  から  $f_k$  に切り換わる断続面  $\Pi_k$  を式 (2) に定義する．

$$\Pi_k = \{x \in \mathbf{R}^n \mid q_k(x, \theta_k) = 0\}. \quad (2)$$

ここで， $q_k$  はスカラー関数， $\theta_k$  は関数  $q_k$  固有のパラメータであり式 (1) とは無関係とする．今，点  $x_i \in \Pi_i$  を初期値とする軌道が， $\Pi_{i+1}$  と交わる点を  $x_{i+1}$  と表す．解軌道が  $m$  個の断続断面を通過し，周期的であるとき，式 (3) に示される， $m$  個の局所写像を定義で

きる．

$$\begin{aligned} T_0 &: \Pi_0 \rightarrow \Pi_1, \\ x_0 &\mapsto x_1 = \varphi_0(x_0, \tau_0), \\ T_1 &: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2, \\ x_1 &\mapsto x_2 = \varphi_1(x_1, \tau_1), \\ &\vdots \\ T_{m-1} &: \Pi_{m-1} \rightarrow \Pi_0, \\ x_{m-1} &\mapsto x_0 = \varphi_{m-1}(x_{m-1}, \tau_{m-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， $\tau_i$  は局所写像  $T_i$  における，解軌道が断面間を遷移するのにかかる時間を表し， $x_i$  及び写像先の断面  $\Pi_j$  に関するパラメータ  $\theta_j$  に依存したスカラー関数となっている．今， $x_0 \in \Pi_0$  を出発した軌道が時間  $\tau$  後に再び  $x_0$  に戻ってきたとする．このとき， $\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i$  である．式 (3) より，各局所写像の合成写像はポアンカレ写像  $T$  として次式で表される：

$$T(x_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}) = T_{m-1} \circ \dots \circ T_1 \circ T_0 \quad (4)$$

$t = 0$  で  $x_0 \in \Pi_0$  を出発した軌道が再び  $\Pi_0$  において  $x_0$  を通過するときの  $x_0$  を  $T$  の固定点という：

$$x_0 = T(x_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}). \quad (5)$$

系 (1) の周期解に周期倍分岐，接線分岐などが生じる場合，それらの固定点位置とパラメータ値を求めるには，式 (5) とその特性方程式の連立方程式をシューティング法を用いて解けばよい．しかしながら，系 (1) に関する分岐計算においては，高坂ら [9] によって，局所座標系への変換が必要であることが示されている．すなわち，式 (5) について  $\Pi_0$  上の  $n-1$  次元局所座標系  $\Sigma$  を考え，局所座標  $u$  を導入する：

$$u \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}. \quad (6)$$

ここで，局所座標上の状態変数  $u$  は局所断面上の法線ベクトル方向の情報が固定されるため，一次元退化している．埋込写像と射影は式 (7) で定義する：

$$p^{-1}: \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow \Pi_0 \\ u \mapsto x \end{array}, \quad p: \begin{array}{l} \Pi_0 \rightarrow \Sigma \\ x \mapsto u \end{array}. \quad (7)$$

このとき，局所座標上でのポアンカレ写像  $T_\ell$  は式 (8) で表される：

$$\begin{aligned} T_\ell : \Sigma &\rightarrow \Sigma, \\ \mathbf{u} &\mapsto p \circ T \circ p^{-1}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (8)$$

よって式 (5) は局所座標系では

$$\mathbf{u}_0 = T_\ell(\mathbf{u}_0) = p \circ T \circ p^{-1}(\mathbf{u}_0) \quad (9)$$

と表される．このとき  $\mathbf{u}_0$  は局所座標系での固定点であり，これに関する特性方程式は，

$$\chi_\ell(\mu) = \det \left( \frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{u}_0} - \mu I \right) = 0 \quad (10)$$

と表される．分岐を生じる固定点やパラメータを求めるとは，式 (9)，(10) を連立させた式 (11) を解けばよい [3]．

$$\begin{cases} T_\ell(\mathbf{u}_0) - \mathbf{u}_0 = 0, \\ \chi_\ell(\mu) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

ここで，式 (11) 第 1 式は固定点条件，第 2 式は分岐条件を表す． $\mu$  は特性乗数を表し，例えば周期倍分岐の場合は  $\mu = -1$  である．解法としてニュートン法を用いる場合，式 (9) 及び (10) の状態変数やパラメータに関する導関数を必要とするが，それらは，式 (9) に関する第 1 変分方程式及び第 2 変分方程式の数値積分値により構成できる（具体的な手続きは高坂 [9] を参照）．

## 2.2 しきい値に関する変分

文献 [5], [9] では主に，変分方程式に含まれるパラメータに関する解析が行われている．そのパラメータを変動させることで，周期倍分岐や接線分岐といった分岐現象が現れることが示され，その分岐集合も詳細に調べられた．

断続的特性を表す式に含まれるパラメータを変動させた場合，例えばスイッチの動作しきい値を変動させると，同様な分岐現象が観測される．この分岐現象をシューティング法で解析するには断続断面に含まれるパラメータに関する微分を計算する必要がある．以下ではその計算方法を検討する．

式 (3) より， $\Pi_i \rightarrow \Pi_{i+1}$  で表される写像  $T_i$  は下記で定義される：

$$T_i(x_i, \theta_{i+1}) = \varphi_i(x_i, \tau_i). \quad (12)$$

ここで， $0 \leq i \leq m-1$  である． $\tau_i$  は写像先の断面に関するパラメータ  $\theta_{i+1}$  に依存する．式 (12) における  $\theta_{i+1}$  での微分は chain rule より式 (13) で与えられる．

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_{i+1}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_{i+1}}. \quad (13)$$

ここで，軌道は局所断面に対して横断的，すなわち， $\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \neq 0$  であると仮定する．次に，断面を定義するスカラー関数  $q_{i+1}(\varphi_i(\mathbf{x}_i, \tau_i), \theta_{i+1}) = 0$  を  $\theta_{i+1}$  で微分する．chain rule より式 (14) が得られる．

$$\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_{i+1}} + \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} = 0. \quad (14)$$

式 (14) より，

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_{i+1}} = - \frac{1}{\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}} \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} \quad (15)$$

であるので，式 (15) を式 (13) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_{i+1}} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_{i+1}} \\ &= \frac{-1}{\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}} \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (16)$$

を得る．これは局所写像  $T_i$  での  $\theta_{i+1}$  に関する微分を表す．式 (4)，(16) より，ポアンカレ写像  $T$  の局所断面  $\Pi_j$  に関するパラメータ  $\theta_j$  に関する微分は chain rule より式 (17) となる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} (T_{m-1} \circ \cdots \circ T_1 \circ T_0), \\ &= \left( \prod_{i=m-1}^j \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \frac{\partial T_{j-1}}{\partial \theta_j}. \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) の各項は式 (1) に関する変分方程式を求積することにより全て求めることができる．式 (7)，(8) より， $\Sigma$  上での写像  $T_\ell$  の  $\theta_j$  に関する微分は式 (19) となる．

$$\begin{aligned} T_\ell(\mathbf{u}_0, \theta_0, \dots, \theta_{m-1}) \\ = p \left( T(p^{-1}(\mathbf{u}_0), \theta_0, \dots, \theta_{m-1}) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial \theta_j} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \theta_j}. \quad (19)$$

また，周期点の場合も同様の手順で計算することができる．

ニュートン法を用いてしきい値による分岐パラメータを求めるとき，漸化式は

$$F'(z_n)(z_{n+1} - z_n) = -F(z_n) \quad (20)$$

で表される．ここで， $z = (x, \theta_j)$  は，状態変数とパラメータを合わせたベクトル， $F(z)$  は式 (11) 左辺を表す．よって，式 (20) 左辺の  $F'$  は

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_\ell}{\partial x} - I & \frac{\partial T_\ell}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial}{\partial x} \chi(\mu) & \frac{\partial}{\partial \theta_j} \chi(\mu) \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる．

しきい値の変化による分岐現象を説明するには，一次元分岐図やブルートフォース法がよく用いられるが，本シューティング法により，より精度高く分岐集合を求められる．また，高次元系の場合の不安定解の分岐集合も安定に計算することができる．

### 3. 適用例

本章では，高次元でかつ断続面が複数ある例として，結合 Izhikevich モデルに対する分岐解析を行う．

単体の Izhikevich モデルはニューロンの発火現象をモデル化した数理モデルの一つである [5]．これは，簡素な二次元力学に断続特性として跳躍を加えたものであり，数値実験より regular spiking や chattering spiking といった数多くの発火パターンを示すことが確認されている．本章では，Izhikevich モデルを拡散結合した結合 Izhikevich モデルを考える：

$$\dot{x} = f(x) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04x_0^2 + 5x_0 + 140 \\ -y_0 + I + \delta(x_1 - x_0) \\ a(bx_0 - y_0) \\ 0.04x_1^2 + 5x_1 + 140 \\ -y_1 + I + \delta(x_0 - x_1) \\ a(bx_1 - y_1) \end{pmatrix},$$

if  $x_0 = \theta_0$ ,

then  $x_0 \leftarrow c, y_0 \leftarrow y_0 + d$ ,

if  $x_1 = \theta_1$ ,

then  $x_1 \leftarrow c, y_1 \leftarrow y_1 + d$ . (22)

ここで， $x = (x_0, y_0, x_1, y_1)^T$  は状態変数， $x^i = (x_i, y_i)^T$  は各単体 Izhikevich モデルの状態変数， $a, b, c, d, I$  は二つの Izhikevich モデル共通のパラメータ， $\theta_i$  は各断続特性固有のパラメータ， $\delta$  は拡散結合の結合係数を表す．単体モデルの断続特性の振舞いを図 1 に示す． $x(t)$  が  $\theta$  に到達すると瞬時に状態の跳躍が発生する．拡散結合した結合系 (22) では，図 1 の

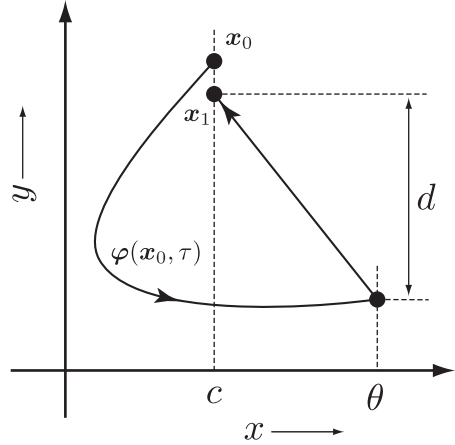


図 1 単体 Izhikevich モデルの振舞い  
Fig. 1 Behavior of the single Izhikevich model.

断続特性が二つになり，それらが互いに独立して発生する．そのため，断続イベントが同時に発生する場合も存在し，解析が複雑となる．

跳躍特性をもつ単体の Izhikevich モデルでの解析手法は既に提唱されており，詳細な分岐解析も既に行われている [10]．しかし，しきい値を分岐パラメータとした分岐現象は解析されていない．そこで，式 (22) において二つのしきい値  $\theta_0, \theta_1$  を分岐パラメータとして分岐問題を解析する．

式 (22) より，結合 Izhikevich モデルにおける局所写像は四つ考えられる．それぞれの局所写像は，

$$\begin{aligned} T_0 &: \Pi_0 \rightarrow \Pi_0, \\ T_1 &: \Pi_0 \rightarrow \Pi_1, \\ T_2 &: \Pi_1 \rightarrow \Pi_0, \\ T_3 &: \Pi_1 \rightarrow \Pi_1. \end{aligned} \quad (23)$$

である．ここで，各断面は式 (24) で定義される．

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \{x \in \mathbf{R}^4; q_0(x) = x_0 - \theta_0 = 0\}, \\ \Pi_1 &= \{x \in \mathbf{R}^4; q_1(x) = x_1 - \theta_1 = 0\}. \end{aligned} \quad (24)$$

今， $x_0 \in \Pi_0$  を出発した解軌道が断続断面  $\Pi_1$  を通過し，再び  $x_0 \in \Pi_0$  に戻ると仮定する．この解軌道のポアンカレ写像は次式で表される：

$$T(x_0) = T_2 \circ T_1. \quad (25)$$

断面  $\Pi_0$  上の点  $x_0$  から出発した軌道が断面  $\Pi_1$  上の点  $x_1$  に到達したとする．このときの局所写像  $T_1$  を

断面  $\Pi_1$  のパラメータ  $\theta_1$  で微分すると、式 (16) より、以下のように表される：

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_1} = \frac{1}{f_3(x_1)} f(x_1). \quad (26)$$

ポアンカレ断面を  $\Pi_0$  とすると、局所座標系  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)$  を示す埋込写像  $p^{-1}$  と射影  $p$  は式 (27) で表される。

$$\begin{aligned} p^{-1}(\mathbf{u}) &= \mathbf{x} = (c, u_0, u_1, u_2)^T, \\ p(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} = (y_0, x_1, y_1)^T. \end{aligned} \quad (27)$$

よって、ポアンカレ写像  $T_\ell$  の断面パラメータ  $\theta_1$  に関する微分は式 (28) で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\ell}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \theta_1}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \theta_1}. \end{aligned} \quad (28)$$

よって、シューティング法による分岐パラメータ値としてしきい値を用いる準備ができた。

### 3.1 断続イベントが解析に与える影響

複数の断続特性をもつ場合、それらのしきい値で表される断面が互いに交差することが考えられる。軌道がこれら断面を独立に通過する場合は系に含まれる断続面の一つをポアンカレ断面とみなすことで分岐パラメータについて解けるが、系に対称性がある場合にはこの交差線上を軌道が通過する、すなわち、複数の断続的イベントが同時に発生することがある。

Izhikevich 結合モデル (22) においては、二つのしきい値が一致する、すなわち、 $\theta_0 = \theta_1$  である場合が系が対称性をもつ場合に対応する。交差線上を通過するリミットサイクルを解析するとき、シューティング法の収束過程で生じる  $x^1, x^2$  への非対称な修正量により跳躍のタイミングが大きくなる。図 2 に、 $\theta_0 = \theta_1 = 30$ 、 $\delta = -0.05$  における各モデルのポアンカレ写像 1 周期分の軌道  $x_0, x_1$  の推移を示す。図 2 (a) は理想的な同相同期状態の軌道を示し、図 2 (b) は同相同期状態の初期値  $x_1$  に微小量  $\Delta x_1 = 10^{-5}$  の変化を加えた場合を示す。 $x_0$  と  $x_1$  が同時に跳躍していないことが分かる。結果として、初期値においては微小な偏差であるにもかかわらず、ポアンカレ写像をとると、 $x_1$  の値が (a) と (b) とで大きなずれが生じていることが確認できる。よって、真値との誤差が小さいにもかかわらず、式 (20) で表されるニュートン法漸化式の右辺に大き

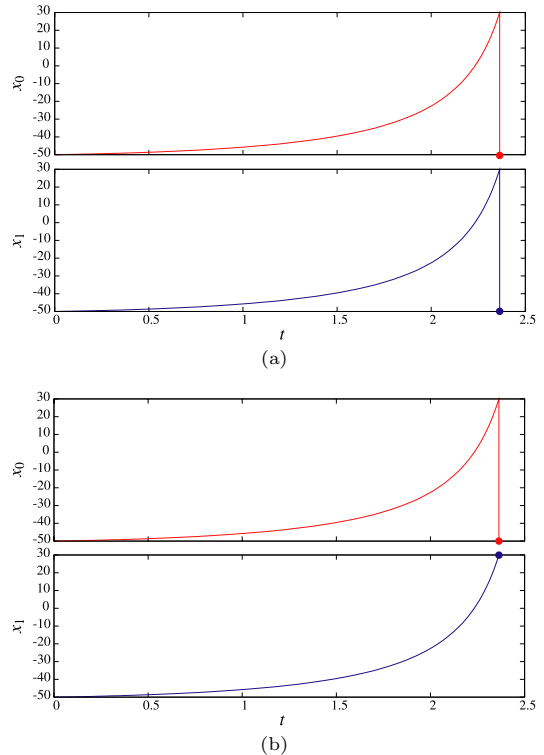


図 2 結合 Izhikevich モデルのポアンカレ写像中の軌道 (a) 同相同期状態、(b) 微小な偏差を加えた場合  
Fig. 2 The orbit of a coupled Izhikevich model in one cycle. (a) in-Phase Synchronization and (b) with a small perturbation.

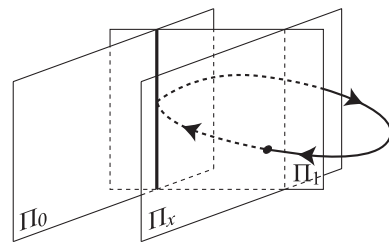


図 3 解析用ポアンカレ断面  $\Pi_x$   
Fig. 3 The Poincaré section  $\Pi_x$  for analysis.

な値が代入され、修正量も比例して大きくなり、結果として収束性能に悪影響を及ぼす。

この問題の回避策として、図 3 で示すように、新たに解析用のポアンカレ断面を設けた。すなわち、リミットサイクルが解析用断面と他の局所断面との交差線上を通過せず、かつ横断的に断面を通過する位置に新しく局所断面を設ける。そして、新しく設けた解析用の局所断面をポアンカレ断面とみなすことにより、

軌道が通過する交差線に関する断面は双方とも軌道に対して横断的な断続断面となり，ニュートン法の収束過程で微小な偏差が生じてもポアンカレ写像への影響をなくすることができる．よって，軌道が局所断面の交差線上を通過する場合でも正確に安定性や分岐現象を計算することができるようになる．式 (22) で表される Izhikevich モデルの結合系に対する解析用のポアンカレ断面  $\Pi_x$  を式 (29) に示す．

$$\Pi_x = \{x \in \mathbf{R}^4; q_x(x) = x_0 = 0\}. \quad (29)$$

式 (29) より，式 (23) の局所写像を再定義する：

$$\begin{aligned} T_{x0} : \Pi_x &\rightarrow \Pi_0, \\ T_{x1} : \Pi_x &\rightarrow \Pi_1, \\ T_0 : \Pi_0 &\rightarrow \Pi_0, \\ T_1 : \Pi_0 &\rightarrow \Pi_1, \\ T_2 : \Pi_1 &\rightarrow \Pi_0, \\ T_3 : \Pi_1 &\rightarrow \Pi_1, \\ T_{0x} : \Pi_0 &\rightarrow \Pi_x, \\ T_{1x} : \Pi_1 &\rightarrow \Pi_x. \end{aligned} \quad (30)$$

ポアンカレ写像の合成写像を再定義する．今， $x_x \in \Pi_x$  を出発した解軌道が断続断面を  $\Pi_0, \Pi_1$  と通過し，再び  $x_x \in \Pi_x$  に戻ってきたとする．式 (30) より，式 (25) の合成写像は次式で表される．

$$T(x_x) = T_{1x} \circ T_1 \circ T_{x0}. \quad (31)$$

ここで，解析用の断続断面を増やすことにより，図 3 における，局所断面  $\Pi_x$  上で断続的イベントは増加する．よって，2. で示される断続特性の評価や計算も増えることになる．

### 3.2 適用結果

図 4 は， $\theta_0$ - $\theta_1$  平面における分岐図を示す．図 4 中の  $PD^i$  は  $i$  周期の周期倍分岐， $G^i$  は  $i$  周期の接線分岐を表す．ここで，各パラメータは  $a = 0.2, b = 0.2, c = -50, d = 2, I = 10, \delta = -0.1$  である．各モデルのパラメータは同じ値としているので，この系は対称性を有している．また，分岐図が対角線を軸として対称になっていることから対称性を有していることが確認できる．また，断続特性を示す断面のしきい値によって様々な分岐現象が発生することが分かる．接線分岐  $G^i$  が発生すると  $i$  周期解が発生し，それらが周期倍分岐を起こし不安定な  $i$  周期解と安定な倍周期の

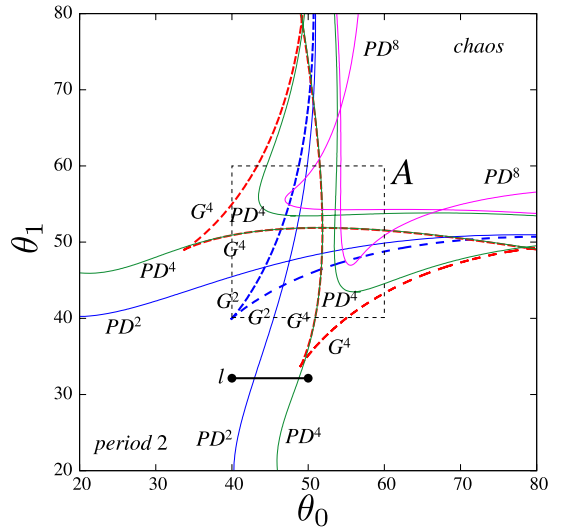


図 4  $\theta_0$ - $\theta_1$  平面分岐図． $a = 0.2, b = 0.2, c = -50, d = 2, I = 10, \delta = -0.1$  .  
Fig. 4 Bifurcation diagram in  $\theta_0$ - $\theta_1$  plane.  $a = 0.2, b = 0.2, c = -50, d = 2, I = 10$  and  $\delta = -0.1$ .

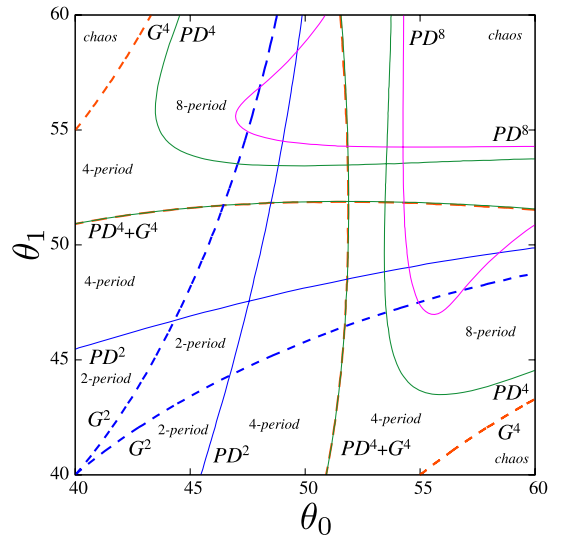


図 5  $\theta_0$ - $\theta_1$  平面分岐図 (領域 A の拡大図)  
Fig. 5 The bifurcation diagram in  $\theta_0$ - $\theta_1$  plane (enlargement of the region A).

周期解に変化する，最終的に周期倍分岐連鎖を起こしカオスに遷移していく．図 5 の中央右側の 8 周期領域周辺では，カオスや安定な 2 周期解，4 周期解とも共存している．図 6 に  $\theta_0 = 54, \theta_1 = 48$  における安定な 2 周期解と 8 周期解を示す．

図 7 は  $\theta_1 = 32$  で固定した線分  $l$  上的一次元分岐図を表す． $PD^2, PD^4$  において，周期倍分岐が発生し，

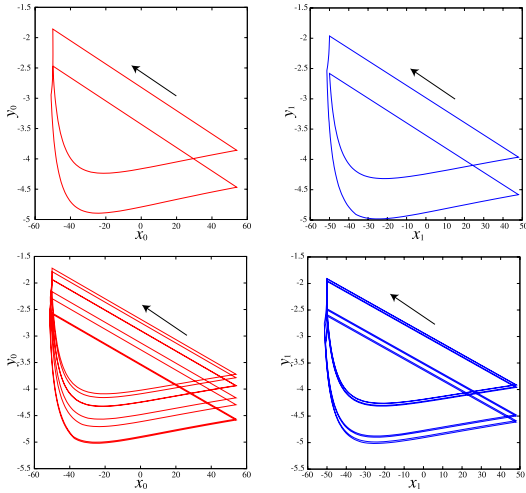


図 6  $\theta_0 = 54, \theta_1 = 48$  における相平面図  
Fig. 6 The phase portraits with  $\theta_0 = 54$  and  $\theta_1 = 48$ .

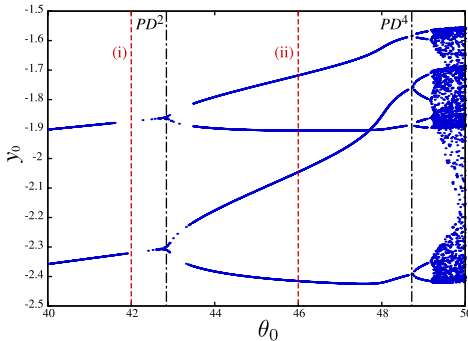


図 7  $\theta_1 = 32$  の線分  $l$  上の  $y_0$ - $\theta_0$  平面一次元分岐図  
Fig. 7 The one dimension bifurcation diagram in  $y_0$ - $\theta_0$  plane along a segment  $l$  with  $\theta_1 = 32$ .

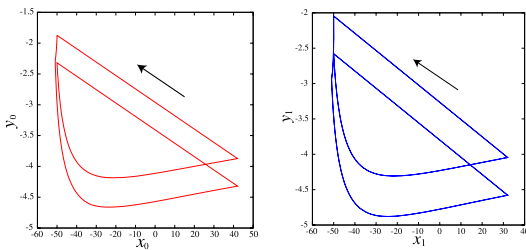


図 8 図 7 の (i)  $\theta_0 = 42$  における相平面図  
Fig. 8 The phase portraits with (i)  $\theta_0 = 42$  in Fig. 7.

それらが連鎖することによりカオスへ遷移していることが確認できる．図 8, 図 9 には図 7 の (i) 及び (ii) で表した  $\theta_0$  におけるアトラクタの相平面図を示す．

$\delta = -0.05$  としたときの  $\theta_0$ - $\theta_1$  平面における分岐図を図 10 に示す．結合係数が小さくなったため、大き

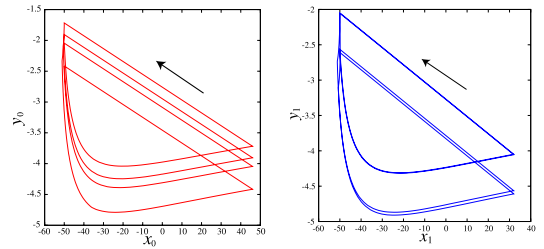


図 9 図 7 の (ii)  $\theta_0 = 46$  における相平面図  
Fig. 9 The phase portraits with (ii)  $\theta_0 = 46$  in Fig. 7.

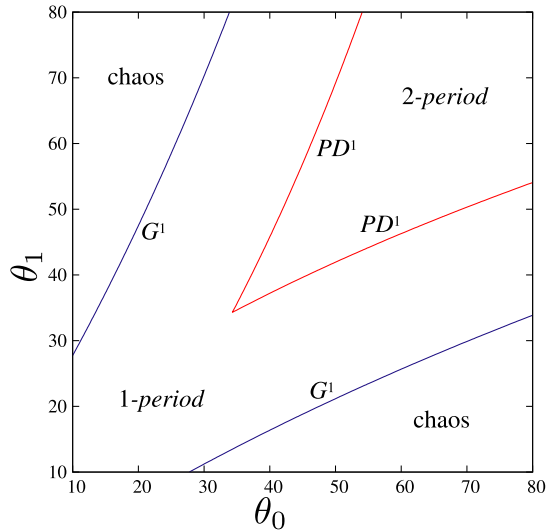


図 10  $\theta_0$ - $\theta_1$  平面分岐図 .  $a = 0.2, b = 0.2, c = -50, d = 2, I = 10, \delta = -0.05$  .  
Fig. 10 The bifurcation diagram in  $\theta_0$ - $\theta_1$  plane.  $a = 0.2, b = 0.2, c = -50, d = 2, I = 10$  and  $\delta = -0.05$ .

い周期の解が発生しなくなり、分岐構造が簡素になっている．しかし、依然として対称性を有していることが確認できる．

#### 4. むすび

本論文では、断続力学系における、断続特性のしきい値に関する分岐解析手法について述べた．断続力学系をしきい値について解析する場合、それら断続断面をポアンカレ断面とみなし、適切に評価することにより、微分等の計算が可能であることを示した．また、それらを用いて周期倍分岐及び接線分岐の解析を行えることを確認した．また、複数の断面をもつ系において、それら断面の交差が解析に影響を与え得ることを示し、その問題の解決のために、解析用の断面を新しく設ける手法を提案した．

謝辞 本研究の一部は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST合原最先端数理モデルプロジェクト）により、日本学術振興会を通して助成されたものです。

文 献

- [1] T. Ueta, M. Tsueike, H. Kawakami, T. Yoshinaga, and Y. Katsuta, "A computation of bifurcation parameter values for limit cycles," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E80-A, no.9, pp.1725–1728, Sept. 1997.
- [2] Y. Nishiuchi, T. Ueta, and H. Kawakami, "Stable torus and its bifurcation phenomena in a three-dimensional autonomous circuit," Chaos, Solitons and Fractals, vol.27, no.4, pp.941–951, Feb. 2006.
- [3] H. Kawakami and K. Kobayashi, "A computation of periodic solutions of nonlinear autonomous systems," Proc. ISCAS'79, pp.44–45, Tokyo, Japan, June 1979.
- [4] Y.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, third ed., Springer-Verlag, 2004.
- [5] E.M. Izhikevich, "Simple model of spiking neurons," IEEE Trans. Neural Netw., vol.14, no.6, pp.1569–1572, Nov. 2003.
- [6] H. Nakano and T. Saito, "Basic dynamics from a pulse-coupled network of autonomous integrate-and-fire chaotic circuits," IEEE Trans. Neural Netw., vol.13, no.1, pp.92–100, Jan. 2002.
- [7] T. Tsubone and T. Saito, "Manifold piecewise constant systems and chaos," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E82-A, no.8, pp.1619–1626, Aug. 1999.
- [8] N. Inaba, T. Saito, and S. Mori, "Chaotic phenomena in a circuit with a negative resistance and an ideal switch of diode," IEICE Trans., vol.E70, no.8, pp.744–754, Aug. 1987.
- [9] T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, "Bifurcation of switched nonlinear dynamical systems," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.46, no.7, pp.878–885, 1999.
- [10] A. Tamura, T. Ueta, and S. Tsuji, "Bifurcation analysis of Izhikevich neuron model," Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, vol.16, no.6, pp.759–775, Dec. 2009.
- [11] T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, "Bifurcation of a nonlinear circuit with a state dependent switch," Proc. NOLTA'98, pp.867–870, Crans-Montana, Switzerland, Sept. 1998.
- [12] M. Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, and P. Kowalczyk, Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications, Springer-Verlag, 2007.
- [13] Q. Brandon, T. Ueta, D.F. Prunaret, and T. Kousaka, "Numerical bifurcation analysis framework for autonomous piecewise-smooth dynamical systems," Chaos, Solitons and Fractals, vol.42, pp.187–201, 2009.

（平成 23 年 1 月 17 日受付，3 月 19 日再受付）



伊藤 大輔

2010 徳島大・工・知能情報卒．現在同大大学院先端技術科学教育部システム創生工学専攻在学中．断続力学系の解析に関する研究に従事．



上田 哲史（正員）

1990 徳島大・工・電子卒．1992 同大大学院博士前期課程了，2002 徳島大学高度情報化基盤センター准教授．2009 教授．現在，徳島大学情報化推進センター教授．専門は非線形力学系の解析と応用．



合原 一幸（正員）

1977 東大・工・電気卒，1982 同大大学院電子工学博士課程了．現在東大・生産技術研究所教授，同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻教授（兼任），同大学院工学系研究科電気工学系専攻教授（兼任）．専門は数理工学，カオス工学，生命情報シ

ステム論．