自然科学研究（査読論文）
第 31 巻 5-8 頁（2018 年）

量子レトロディクションと履歴

井澤 健一 a)，谷口 智紀 b)

a) 徳島大学大学院社会産業理工学研究部
b) 徳島大学大学院総合科学教育部

Quantum retrodiction and the recorded past

Izawa K.-I. and T. Taniguchi

Institute of Theoretical Physics, Tokushima University

Abstract

We further see the content and consistency of our claims on retrodictive aspects of quantum theory based on the previous papers, which deal with quantum mechanics of a single particle in one-dimensional space under successive mearsurements of particle position and momentum as a wave packet. The content of retrodiction can be best understood as statements on the past recorded in the present state. Conditional probabilites with the past and future states specified are consistently obtained through the ordinary predictive and/or our retrodictive probability formula in any combined way.

Keywords: Past recorded, Quantum theory, Retrodiction

1　はじめに

量子論において未来の状態は、現在の状態が与えられれば確率的に現実と対応する。他方、過去については、更に初期的な状態に関する事前確率を想定すると、一般に条件付き確率としてのレトロディクション（遡時予言）を得ることが出来る [1]。

事前確率の前提なしに過去の事象の確率を得る試みとして我々はこれまで、一次元空間における粒子の運動を例にとり、考察を進めてきた [2, 3]。具体的には、一定の時間間隔で逐次的に位置と運動量の同時測定を行なう理想測定を設定し、運動する正規分布型の波束が最小波束へと帰着する場合の予言的な確率分布を求め、それに基づいて区間推定に則ったレトロディクションを考案した。

この論文では、これまでの考察を更に進めるため、粒子の運動に関して新たに履歴の観点を導入して検討を行なう。これまでの論文 [2, 3] で扱ったのと同様に、一次元空間における波束の運動を扱おう。時間間隔 τ ごとに逐次的に位置と運動量の同時測定が繰り返され、測定直後は位置の分散 σ^2 の最小波束の形で波動関数が得られるものとする。簡単のため、特に時刻 t から時刻 $t+2\tau$ の間での粒子の運動を取り上げる。時刻 t における測定結果について、粒子の最小波束が平均運動量 p_0 で中心の位置が q_0 と記された記録の状態を $|p_0, q_0\rangle$ と表す。その後の時間発展でも同様に、時刻 $t+\tau$ では $|p_1, q_1\rangle$ と記録され、時刻 $t+2\tau$ には $|p_2, q_2\rangle$ と記録された場合に、現在の状態は、$|p_2, q_2\rangle|p_1, q_1\rangle|p_0, q_0\rangle$ という記録の全体（と現在の粒子そのものの状態の合成）と考えることができる。このように、現在の状態

として過去の記録も併せて全体を記述したものを履歴と呼ぶことにする。

次節では、履歴で表される粒子の運動についての具体的な考察の端緒として、未来予言的な確率と区間推定に則ったレトロディクションの比較を行なう。第 3 節では、それを踏まえて履歴の中で境界条件を設定し、対応する条件付き確率を未来予言と遡時予言の任意の組み合わせを用いて計算し、その一致をみる。第 4 節では、より一般に履歴の観点から、量子論の現在解釈を提案する。最終節は本論文のまとめである。

2 順次確率

以下では具体的には論文 [3] で得られた、線形ポテンシャル $V(x) = -max$ の下での質量 m の粒子の運動を例に扱おう。最初に、時刻 t における $|p_0, q_0\rangle$ を初期条件 (始状態) とし、粒子が時刻 $t+\tau$ の $|p_1, q_1\rangle$ を経て、時刻 $t+2\tau$ の $|p_2, q_2\rangle$ へと逐次的に時間発展する場合の確率を考える。まず、時刻 t の $|p_0, q_0\rangle$ が時間発展し、時刻 $t+\tau$ に相体積 dp_1dq_1 中の $|p_1, q_1\rangle$ が得られる確率 $\rho_1(p_1, q_1; p_0, q_0)dp_1dq_1$ は、$z = \sigma^2 + i\tau/2m$ として、

$$\begin{aligned}
&\rho_1(p_1, q_1; p_0, q_0)dp_1dq_1 \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp\left(-\sigma^2\left[(p_1 - p_0 - ma\tau)^2 + \frac{\left(q_1 - q_0 - \frac{\tau}{2m}(p_1 + p_0)\right)^2}{3\sigma^4 + |z|^2}\right]\right) dp_1dq_1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

と求まる [3]。続いて、時刻 $t+\tau$ の $|p_1, q_1\rangle$ が時間発展し、時刻 $t+2\tau$ に相体積 dp_2dq_2 中の $|p_2, q_2\rangle$ と測定される確率 $\rho_2(p_2, q_2; p_1, q_1)dp_2dq_2$ は同様に、

$$\begin{aligned}
&\rho_2(p_2, q_2; p_1, q_1)dp_2dq_2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp\left(-\sigma^2\left[(p_2 - p_1 - ma\tau)^2 + \frac{\left(q_2 - q_1 - \frac{\tau}{2m}(p_2 + p_1)\right)^2}{3\sigma^4 + |z|^2}\right]\right) dp_2dq_2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

となる。以上より、時刻 t における $|p_0, q_0\rangle$ を初期条件とし、時刻 $t+2\tau$ に相体積 dp_2dq_2 中の $|p_2, q_2\rangle$ が実現する確率 P_1 は、

$$\begin{aligned}
P_1 &= dp_2dq_2 \int dp_1dq_1\rho_1\rho_2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{8(\sigma^4 + |z|^2)}} \exp\left(-\sigma^2\left[\frac{(p_2 - p_0 - 2ma\tau)^2}{2} + \frac{\left(q_2 - q_0 - \frac{\tau}{m}(p_0 + p_2)\right)^2}{4(\sigma^4 + |z|^2)}\right]\right) dp_2dq_2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

と得られる。この結果から逆に、相体積 dp_0dq_0 に対して区間推定に基づく遡時予言が可能で、その確率 P_2 は、

$$P_2 = \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{8(\sigma^4 + |z|^2)}} \exp\left(-\sigma^2\left[\frac{(p_0 - p_2 + 2ma\tau)^2}{2} + \frac{\left(q_0 - q_2 + \frac{\tau}{m}(p_0 + p_2)\right)^2}{4(\sigma^4 + |z|^2)}\right]\right) dp_0dq_0 \qquad (4)$$

と分かる。

次に、時刻 $t+2\tau$ の $|p_2, q_2\rangle$ を末期条件 (終状態) とし、粒子が時刻 $t+\tau$ では $|p_1, q_1\rangle$ であり、時刻 t では、$|p_0, q_0\rangle$ であった場合の遡時予言的な確率を考える。時刻 $t+2\tau$ における測定結果が $|p_2, q_2\rangle$ であり、時刻 $t+\tau$ では相体積 dp_1dq_1 中の $|p_1, q_1\rangle$ が得られていた場合の確率 $\Phi_2(p_1, q_1; p_2, q_2)dp_1dq_1$ は、区間推定に則って、

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(p_1, q_1; p_2, q_2)dp_1dq_1 \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp\left(-\sigma^2\left[(p_1 - p_2 + ma\tau)^2 + \frac{\left(q_1 - q_2 + \frac{\tau}{2m}(p_1 + p_2)\right)^2}{3\sigma^4 + |z|^2}\right]\right) dp_1dq_1 \qquad (5)
\end{aligned}$$

と書ける [3]。同様に、時刻 $t+\tau$ における測定結果が $|p_1, q_1\rangle$ であり、時刻 t では相体積 dp_0dq_0 中の $|p_0, q_0\rangle$ が得られていた場合の確率 $\Phi_1(p_0, q_0; p_1, q_1)dp_0dq_0$ は、

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(p_0, q_0; p_1, q_1)dp_0dq_0 \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp\left(-\sigma^2\left[(p_0 - p_1 + ma\tau)^2 + \frac{\left(q_0 - q_1 + \frac{\tau}{2m}(p_0 + p_1)\right)^2}{3\sigma^4 + |z|^2}\right]\right) dp_0dq_0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

となる。これらの表式を上述の未来予言の結果と比較すると、$\rho_1(p_1,q_1;p_0,q_0)=\Phi_1(p_0,q_0;p_1,q_1)$, $\rho_2(p_2,q_2;p_1,q_1)=\Phi_2(p_1,q_1;p_2,q_2)$ とそれぞれ等しくなっている。従って、時刻 $t+2\tau$ の $|p_2,q_2\rangle$ を末期条件とし、時刻 t では相体積 dp_0dq_0 中の $|p_0,q_0\rangle$ であった場合の遡時予言的な確率 P_3 は、

$$\begin{aligned}P_3 &= dp_0dq_0\int dp_1dq_1\Phi_1\Phi_2\\ &= \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{8(\sigma^4+|z|^2)}}\exp\left(-\sigma^2\left[\frac{(p_0-p_2+2ma\tau)^2}{2}+\frac{\left(q_0-q_2+\frac{\tau}{m}(p_0+p_2)\right)^2}{4(\sigma^4+|z|^2)}\right]\right)dp_0dq_0 \qquad (7)\end{aligned}$$

となり、未来予言の結果である式 (3) の確率 P_1 に基づく遡時予言の式 (4) の確率 P_2 と一致する。

3　履歴確率

以上の結果を踏まえて、履歴 $|p_2,q_2\rangle|p_1,q_1\rangle|p_0,q_0\rangle$ において、時刻 t の $|p_0,q_0\rangle$ と時刻 $t+2\tau$ の $|p_2,q_2\rangle$ を固定した境界条件とし、時刻 $t+\tau$ での粒子の状態 $|p_1,q_1\rangle$ を変数とした場合の、考え得る条件付き確率を計算する。

まず、第 2 節前半での結果より、時刻 t から時刻 $t+2\tau$ へと進行する場合の未来予言的な確率 $\xi_{\longrightarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1$ は、$\rho_1(p_1,q_1)=\rho_1(p_1,q_1;p_0,q_0)$, $\rho_2(p_1,q_1)=\rho_2(p_2,q_2;p_1,q_1)$ として、

$$\xi_{\longrightarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1=N_{\longrightarrow}^{-1}dp_2dq_2\rho_1(p_1,q_1)\rho_2(p_1,q_1)dp_1dq_1 \qquad (8)$$

と表せる。ただし、規格化因子は、

$$N_{\longrightarrow}=dp_2dq_2\int dp'_1dq'_1\rho_1(p'_1,q'_1)\rho_2(p'_1,q'_1) \qquad (9)$$

となる。

次に、第 2 節後半での結果より、時刻 $t+2\tau$ から時刻 t へと遡る場合の遡時予言的な確率 $\xi_{\longleftarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1$ は、$\Phi_1(p_1,q_1)=\Phi_1(p_0,q_0;p_1,q_1)$, $\Phi_2(p_1,q_1)=\Phi_2(p_1,q_1;p_2,q_2)$ として、

$$\xi_{\longleftarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1=N_{\longleftarrow}^{-1}dp_0dq_0\Phi_1(p_1,q_1)\Phi_2(p_1,q_1)dp_1dq_1 \qquad (10)$$

と求まる。ただし、規格化因子は、

$$N_{\longleftarrow}=dp_0dq_0\int dp'_1dq'_1\Phi_1(p'_1,q'_1)\Phi_2(p'_1,q'_1) \qquad (11)$$

となる。

更に、時刻 t での状態 $|p_0,q_0\rangle$ の粒子が時刻 $t+\tau$ では $|p_1,q_1\rangle$ と測定され、かつ時刻 $t+2\tau$ における $|p_2,q_2\rangle$ の粒子の状態が時刻 $t+\tau$ では $|p_1,q_1\rangle$ であった場合の確率 $\xi_{\rightarrow\leftarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1$ は、式 (1),(6) より、

$$\xi_{\rightarrow\leftarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1=N_{\rightarrow\leftarrow}^{-1}dp_1dq_1\rho_1(p_1,q_1)\Phi_2(p_1,q_1)dp_1dq_1 \qquad (12)$$

と表せる。ただし、規格化因子は、

$$N_{\rightarrow\leftarrow}=dp_1dq_1\int dp'_1dq'_1\rho_1(p'_1,q'_1)\Phi_2(p'_1,q'_1) \qquad (13)$$

となる。

最後に、時刻 $t+\tau$ において状態が $|p_1,q_1\rangle$ である粒子が時刻 $t+2\tau$ において $|p_2,q_2\rangle$ と測定され、かつ時刻 t では $|p_0,q_0\rangle$ であった場合の確率 $\xi_{\longleftrightarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1$ は、式 (2),(5) より、

$$\xi_{\longleftrightarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1=N_{\longleftrightarrow}^{-1}dp_2dq_2\rho_2(p_1,q_1)\Phi_1(p_1,q_1)dp_0dq_0 \qquad (14)$$

と求まる。ただし、規格化因子は、

$$N_{\longleftrightarrow}=\frac{1}{dp_1dq_1}dp_2dq_2dp_0dq_0\int dp'_1dq'_1\rho_2(p'_1,q'_1)\Phi_1(p'_1,q'_1) \qquad (15)$$

となる。

ここで、以上の４式 (8),(10),(12),(14) を比較すると、前節の結果より $\rho_1(p_1,q_1)=\Phi_1(p_1,q_1)$, $\rho_2(p_1,q_1)=\Phi_2(p_1,q_1)$ であることから、この条件付き確率の導出４通り $\xi_{\leftrightarrow\leftrightarrow}dp_1dq_1$ は、式 (3),(7) を用いて

$$\begin{aligned}\xi_{\leftrightarrow\leftrightarrow}(p_1,q_1)dp_1dq_1 &= \frac{\sigma^2\sqrt{8(\sigma^4+|z|^2)}}{\pi(3\sigma^4+|z|^2)}\exp\left(-\sigma^2\left[2\left(p_1-\frac{p_2+p_0}{2}\right)^2-\frac{\left(q_2-q_0-\frac{\tau}{m}(p_2+p_0)\right)^2}{4(\sigma^4+|z|^2)}\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{\left(q_1-q_2+\frac{\tau}{2m}(p_1+p_2)\right)^2+\left(q_1-q_0-\frac{\tau}{2m}(p_1+p_0)\right)^2}{3\sigma^4+|z|^2}\right]\right)dp_1dq_1 \end{aligned} \tag{16}$$

となり、どれも同じ表式に帰着する。

以上の結果は全て、区間推定に基づくレトロディクションが辻褄の合った手法であることを裏付けるものとなっている。

4　現在解釈

前節まで、量子レトロディクションの内容を条件付き確率の計算を通して履歴の観点から分析してきた。最後により一般的に、履歴に基づく量子論の定式化について考えよう。

過去を “直接” 測定することはできないので、過去についての言明は現在の状態に照らして検討することになる。未来についても同様であり、その未来が現在または過去になった時点ではじめて、関連する測定結果を得ることが可能となる。すなわち、物理的な言明は全て、現在の状態に関する命題と捉えることができる。むしろ原理的には、それ以外の実証法はないと考えられる。

一般に、閉じた量子系の記述は次のように考えることができるであろう。現在の状態を、過去の記録も含め、履歴として捉える。他方、Heisenberg 描像での時間発展を、初期状態に対して射影子の積を時間順序で作用させたヒストリー形式 [4] で表すと、結果として履歴との対応が得られる。ここで、射影子の選択は、履歴の内容により決定されている。この立場では量子論における時間発展はある意味、古典論と同様に、現在の状態のみで決定されていると思うことになり、言わば量子論の現在解釈とでも呼ぶべきものに帰着する。

このように履歴は、現在の状態に時間発展の物理法則を内在している記述法となっており、その記述自体の原理的な必然性があるものと考えられる。この履歴に対して、論文 [2] で提唱した（事象の設定ではなく）確率値中心の確率解釈を適用することで、確率の内容もはっきりさせることができる。すなわち、ヒストリーにおける時間発展過程の確率が、履歴の状態記録分布の頻度確率として具現化する訳である。これは、閉じた一意的な系の量子論の実証に適した解釈ではないかと思われる。

5　おわりに

この論文では、以前の論文 [2, 3] で提案した粒子の運動についての量子論的レトロディクションを用いて、その内容と整合性に関する更なる検討を行なった。特に、過去と未来両側の境界条件を与えた場合の条件付き確率の導出において、遡時予言と未来予言のどのような組み合わせを採っても整合的に同一の結果が得られることを見た。そのための設定として、現在の状態に過去の記録を含めた全体を扱う履歴の導入を図った。

また、履歴に基づく量子論一般の解釈についても考察し、量子論における確率を履歴の状態記録分布の頻度確率として理解した。最後に一つ、時間発展を扱う物理理論全般に潜在する課題を挙げて結びとしよう。通常、現在を含め一時点の状態と時間発展の物理法則は独立に与えられ、状態は任意の境界条件と見なせるはずである。つまり、時間発展と履歴との関係は自明ではなく、現在の状態のみから時間発展の物理法則に関してどのような主張が原理的に可能であるのか、詳しい分析が望まれる。

文　献

[1] S. Watanabe, Rev. Mod. Phys. **27** (1955) 179.

[2] 井澤健一，谷口智紀，自然科学研究 **30** (2017) 1.

[3] 井澤健一，谷口智紀，自然科学研究 **31** (2018) 1.

[4] 例えば、R.B. Griffiths, “Consistent Quantum Theory,” (2002) Cambridge University Press.

論文受付：*2018* 年 *10* 月 *17* 日
論文受理：*2019* 年　*3* 月　*1* 日